

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

В. М. Онищенко

ВІЛЬНІ ТА ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ КОНСТРУКЦІЇ
ЛІТАЛЬНОГО АПАРАТА З ДЕКІЛЬКОМА СТЕПЕНЯМИ ВІЛЬНОСТІ

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2019

УДК 629.735.33.025.015(075.8)

О-59

Рецензенти: д-р техн. наук, проф. В. Г. Солодов,
д-р техн. наук В. В. Логінов

Онищенко, В. М.

О-59 Вільні та вимушені коливання конструкції літального апарата з декількома степенями вільності [Текст] : навч. посіб. / В. М. Онищенко. – Харків: Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т», 2019. – 184 с.

ISBN 978-966-662-657-1

Розглянуто механічні системи конструкції літальних апаратів, що зводяться до спрощених розрахункових схем з одним або декількома степенями вільності. Особливу увагу приділено способам отримання рівнянь руху механічних систем та аналізу їхніх власних і вимушених коливань. На основі створених математичних моделей (ММ) динаміки конструкції ЛА та її навантаження показано приклади їх числового розрахунку на ЕОМ. Отримано форми й частоти власних коливань спрощених моделей конструкції, проаналізовано динаміку її навантаження в процесі власних і вимушених коливань.

Для студентів, які вивчають дисципліни «Стійкість і коливання пружних систем» і «Аеропружність конструкцій», а також при виконанні курсового проекту з дисципліни «Розрахунки на міцність ЛА».

Іл. 133. Табл. 3. Бібліогр.: 9 назв

УДК 629.735.33.025.015(075.8)

ISBN 978-966-662-657-1

© Онищенко В. М., 2019

© Національний аерокосмічний
університет ім. М. Є. Жуковського

«Харківський авіаційний інститут», 2019

ВСТУП

Вивчення основ механіки має велике значення у формуванні наукового світогляду авіаційного фахівця. У механіці разом із математикою і фізикою розглядаються основні фізичні закономірності й поняття, що використовують в інших спецкурсах. Вона є базовою дисципліною для всіх загальноінженерних і спеціальних дисциплін. Теорія механічних коливань як один із напрямків механіки є особливо важливою для інженерів, які працюють в авіаційній галузі. Неможливо без теорії механічних коливань вирішити проблеми балансування машин, крутильних коливань у валах і зубчастих передачах, згинально - крутильних коливань ЛА у польоті.

Постановка практичних задач теорії механічних коливань завжди пов'язана зі складністю її формулювання і навіть розуміння отриманих результатів. Співдружність математики, фізики і техніки, як відзначив Л. І. Мандельштам [9], ніде так яскраво не виявлялася, як при створенні математичного апарату теорії коливань.

Колівання – одне з найбільш поширених явищ у природі, фізиці й техніці. Це процеси, що повторюються в часі. Зміна параметрів стану системи відбувається більш або менш регулярно у часі.

Для світу, в якому ми живемо, характерні коливання. Наприклад, маятник після його відхилення коливається, ми розмовляємо завдяки коливанням голосових зв'язок, а чуємо – через коливання барабаних перетинок. У результаті коливань був зруйнований знаменитий Такомський міст. Відмічені процеси якісно відрізняються один від одного, але виявляється, що кількісні закономірності (тобто математичні вирази) таких процесів мають багато спільного. Саме ця обставина додає вченню про коливання важливого значення.

У 1807 р. доктор Томас Юнг відзначив: «Багато явищ, пов'язаних із теорією звуку і коливань, настільки примітні і забавні, що праця їх дослідника буде сторицею винагороджена тим задоволенням, яке він при цьому отримає».

Колівання можуть бути корисними та шкідливими. Дуже часто в авіаційній техніці доводиться з ними боротися. Вони призводять до руйнування конструкції в основному через втому матеріалу – появи в ньому тріщин, спочатку повільну, а потім – катастрофічно швидко. Іноді інтенсивність коливань стає дуже великою і конструкція руйнується за лічені секунди. Так, конструкція може швидко зруйнуватися, якщо частота зовнішніх впливів збігається з власною частотою коливань. Нерідко

доводиться враховувати і фізіологічні аспекти при дії вібрацій. Так, людина, яка сидить у кріслі, що здійснює вертикальні коливання, гостро реагує на частоту близько 5 Гц. Зауважимо, що коливання в діапазоні від 18 до 18000 Гц відчуються людиною.

С. П. Тимошенко – виходець з України, відомий у світі фахівець в області механіки і теорії коливань пружних систем, в передмові до своєї чудової монографії «Коливання в інженерній справі» писав, що зі збільшенням розмірів і швидкостей сучасних машин стає все більш важливим при проектуванні інженерних конструкцій проводити дослідження коливань, що виникають у них.

Коливання (вібрації) в конструкції практично завжди наявні в процесі її експлуатації. Для літака або вертольота джерелами вібрацій можуть бути двигуни, неспокійна атмосфера, нерівності аеродрому, дії на поверхні керування ЛА з боку льотчика і багато іншого. У вертольоті сильним джерелом коливань є несучий гвинт та інші обертальні агрегати.

Нестаціонарне навантаження ЛА призводить до його деформування і збудження коливань у конструкції. Іноді порушується його нормальне функціонування, ЛА може втратити керованість, стійкість руху і навіть зруйнуватися.

Наприклад, на певних швидкостях польоту дія на крило змінних аеродинамічних сил і сил інерції, а також взаємодія деформацій згинання і крутіння крила може призвести до великого надходження енергії в конструкцію від потоку, що набігає, й швидкого руйнування ЛА (рис. 1, 2).

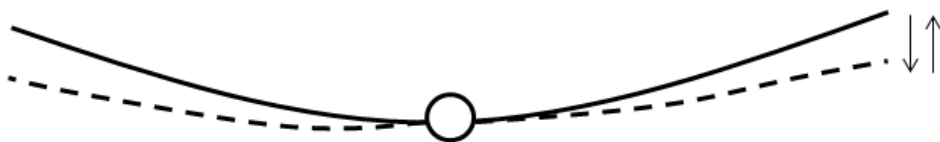


Рис. 1. Зміна форми конструкції і збудження в ній коливань

На рис. 2 показано одну з форм коливань, яку набуває крило при дії на нього збурень від потоку, що набігає зі швидкістю U_0 . Зображені деформації згинання і крутіння крила, які діють одночасно. Це так звані згинально - крутильні коливання консолі.

Для правильного розуміння нестаціонарних процесів, що відбуваються на ЛА у польоті, необхідно знати динаміку авіаційної конструкції та її фундаментальну основу – аеропружність.

Аеропружність – це наука, що вивчає взаємодію аеродинамічних, пружних та інерційних сил. Різні явища аеропружності відрізняються одне

від одного за їх відношенням до сил пружності, інерційним і аеродинамічним силам. Аеропружність набуває все більшого значення в багатьох галузях інженерної справи, особливо в авіації. Сучасні конструкції характеризуються дуже великою гнучкістю, що є основною причиною різних явищ аеропружності. У результаті збільшення розмірів і швидкостей польоту аеропружність стала одним із найбільш важливих чинників, що враховують при проектуванні літаків і вертольотів. Теорія механічних коливань конструкції посідає гідне місце в аеропружності.

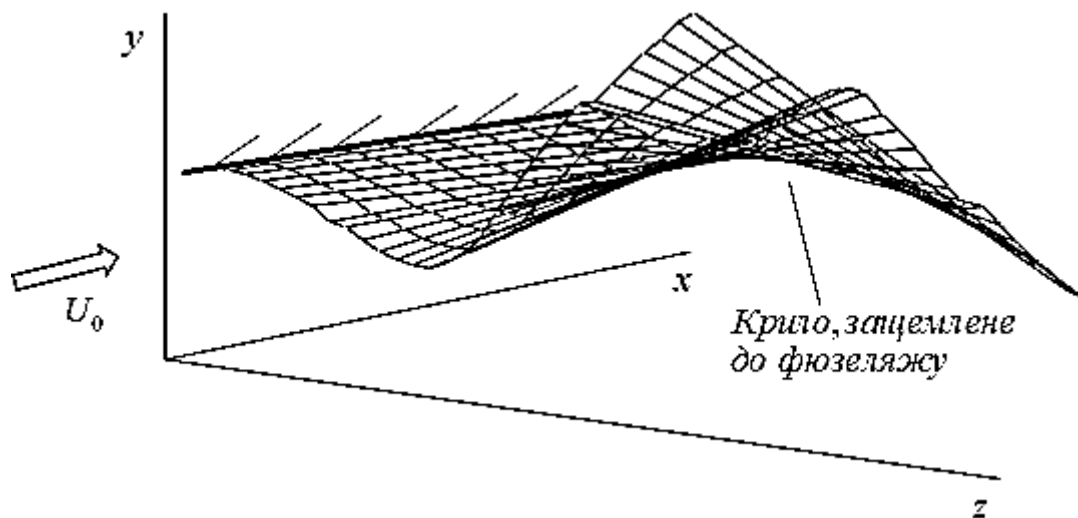


Рис. 2. Форма коливань крила в польоті

Конструктори ЛА постійно стикаються з різними проблемами статичної та динамічної аеропружності.

Міцність літального апарата (ЛА) забезпечується циклом теоретичних, розрахункових та експериментальних робіт, які починають виконувати на стадії ескізного проектування і продовжують до зняття з експлуатації. Забезпечення міцності ЛА – дуже відповідальне завдання, воно регламентується авіаційними правилами (АП).

Для вирішення завдань щодо забезпечення міцності ЛА, як показав досвід їх створення, слід використовувати розрахункові й експериментальні методи.

Для проектування ЛА за умовами міцності характерним є комплексний підхід, при якому одночасно враховують ряд міцнісних вимог до конструкції: забезпечення статичної міцності неушкодженої конструкції, потрібного рівня залишкової міцності за наявності певних допустимих пошкоджень, ресурсу конструкції за умовами опору втомі, вимог до

жорсткості й стійкості конструкції виходячи щодо безпеки за умовами статичної та динамічної аеропружності.

Необхідно запобігти руйнуванню або незворотній зміні форми елементів ЛА, появі неприпустимо великих вібрацій і розвитку коливної нестійкості конструкції, а також обмежити переміщення елементів конструкції. Очевидний, на перший погляд, шлях забезпечення міцності за допомогою збільшення площ поперечних перерізів елементів конструкцій в деяких випадках є неефективним. Пошук оптимальних рішень у задачах динаміки і міцності ЛА – довгий і непростий процес. Слід розуміти фізичні основи функціонування і навантаження літака або вертольота, знати основні чинники, що впливають на їх міцність.

Для регламентування міцності ЛА створені Норми міцності. При перевірці відповідності конструкції ЛА вимогам Норм міцності передбачено широкий комплекс робіт: проведення статичних випробувань; визначення масових, жорсткісних і частотних характеристик; перевірка безпеки від флатера та інших явищ аеропружності; на витривалість і живучість; динамічних випробувань шасі на копрі; льотних – на граничних за умовами міцності режимах і виміру навантажень на основні елементи конструкції.

Основна частина змісту Норм міцності – це вимоги до статичної міцності конструкції.

Норми міцності містять також вимоги, спрямовані на забезпечення безпеки ЛА за умовами аеропружності (флатера, дивергенції, реверсу органів управління, бафтинга, аеропружних коливань у системі "ЛА – САУ", шимі, земного резонансу вертольота та ін.). У конструкції ЛА в межах льотного діапазону швидкостей не можуть виникати небезпечні явища аеропружності. Потрібно не менше ніж 20-відсотковий запас швидкості відносно гранично допустимої швидкості в експлуатації для критичних швидкостей аеропружності. Критичною швидкістю називають швидкість польоту, при перевищенні якої можливе виникнення недопустимих явищ аеропружності.

Дослідження небезпечних явищ аеропружності нерозривно пов'язано з вивченням пружних властивостей конструкції та визначенням її динамічних характеристик – частот і форм власних коливань, які залежать від розподілу мас і жорсткостей по всьому ЛА.

ЛА як пружну систему подають різними схемами – так званими розрахунковими (рис. 3, 4). У звичайних умовах експлуатації літака матеріал конструкції, як правило, працює в пружній області. Тому як розрахункову схему конструкції виберемо лінійну пружну модель. Це

означає, що виконується принцип суперпозиції при врахуванні дії сил на конструкцію. Дію кожної із сил можна розглянути окремо. Пружне переміщення деякої точки буде складатися з переміщень, викликаних кожною із сил. Черговість дії сил не має значення.

Найбільш поширена динамічна схема для літаків і вертольотів з несучою поверхнею великого і помірного подовження ($\lambda > 3$) – балкова (рис. 3, а), де основні агрегати ЛА (крило, лопаті несучого гвинта (НВ), фюзеляж, оперення) замінені еквівалентними балками, що мають розподілені по довжині маси і жорсткості. Зазвичай жорсткості на кручення GI_ρ і вигин EI задають у двох площинах – вертикальній і горизонтальній.

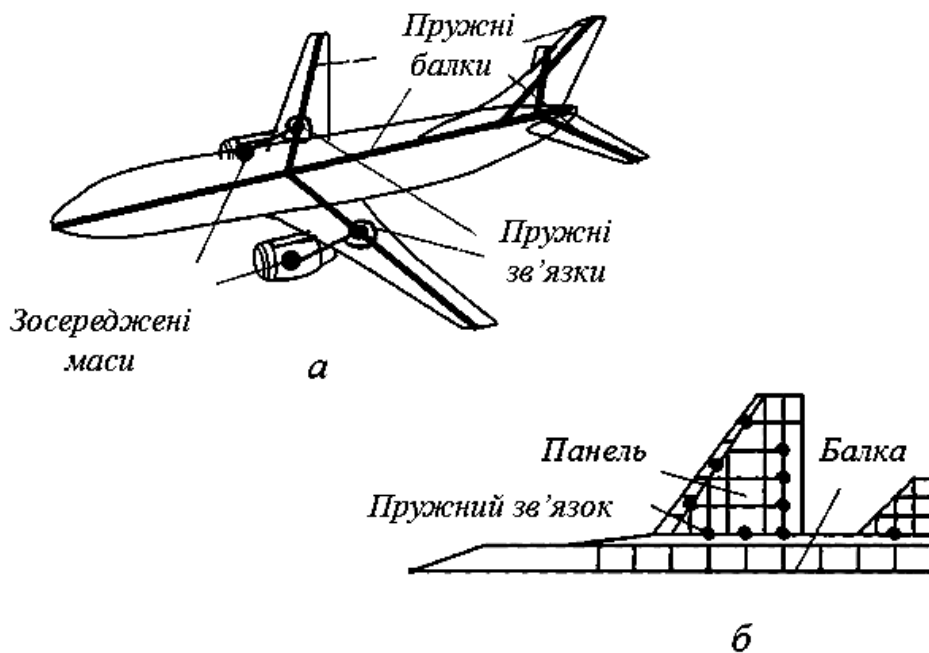


Рис. 3. Розрахункові схеми конструкції ЛА транспортної категорії:
а – балкова; б – пластинчасто-балкова

Кожен агрегат ЛА наведений однією або декількома балками залежно від кількості зламів осі жорсткості. Стики балок можуть бути як абсолютно жорсткими, так і пружними, що характеризуються матрицями піддатливості. Балки мають розподілені масові й інерційні властивості – погонні маси та моменти інерції. Вони можуть нести зосереджені вантажі, такі, як двигуни, шасі, підвісні баки, контейнери. Вантажі зазвичай мають зміщення щодо осі балки і кріпляться до неї або жорстко, або пружно.

Крило на рис. 3,а замінено еквівалентною балкою, вісь якої розташована уздовж осі жорсткості реального крила. Пружні характеристики балки мають бути підібрані таким чином, щоб при одних і тих же зовнішніх навантаженнях величини деформації для крила і

еквівалентної балки збігалися. На рис. 3, б показано комбіновану схематизацію ЛА – пластинчато-балкову. Крило має невелике подовження, тому застосовано пластинчасту його схематизацію, яка дозволяє враховувати деформацію крила вздовж нервюри.

На рис. 4 показані розрахункові схеми маневреного літака. Це може бути балкова схематизація (рис. 4, а), пластинчато-балкова (рис. 4, б) або подання ЛА великою кількістю скінченних елементів (рис. 4, в).

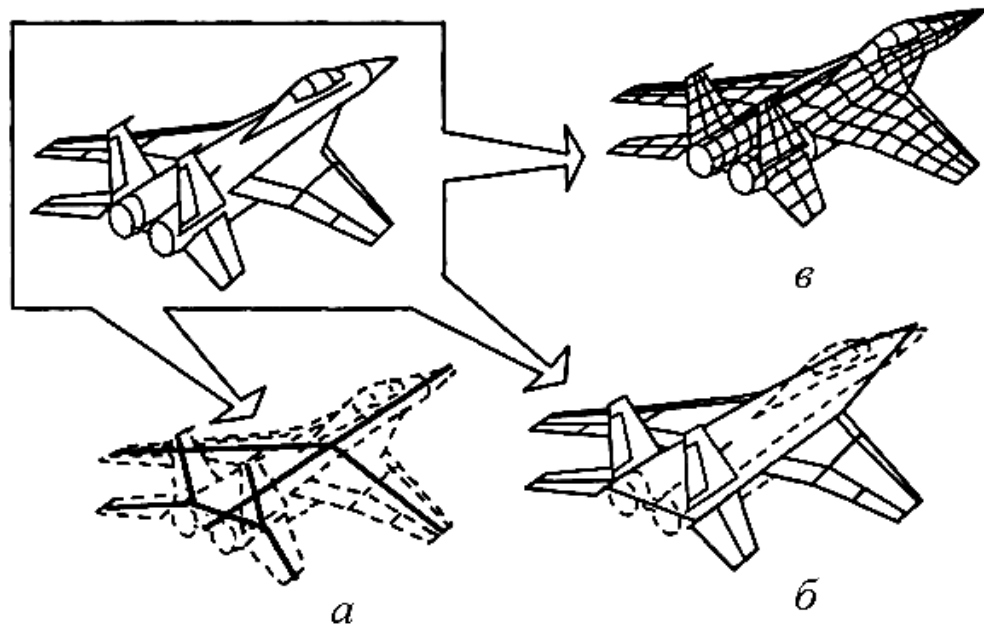


Рис. 4. Розрахункові схеми конструкції маневреного ЛА

Динамічні явища аеропружності слід вивчати з урахуванням дії на пружну конструкцію сил і моментів сил інерції. Будь-яка маса ЛА під дією результуючої сили рухається з деяким прискоренням \vec{a} , при цьому виконується другий закон Ньютона. На рис. 5 показано точкову масу m , що закріплена на невагомій балці. Маса набуває прискорення внаслідок дії сили пружності F_{np} деформованої балки. Сила пружності викликає прискорення маси і обчислюється так:

$$\vec{F}_{np} = m\vec{a}.$$

За третім законом Ньютона маса через свою інертність діє на тіло, що прискорює, з такою ж силою, але протилежно спрямованою. Тому на балку діє сила

$$F_{in} = -\vec{F}_{np} = -m\vec{a},$$

яка називається силою інерції. Вона є причиною деформації балки.

Змінні зовнішні сили і сили інерції мас збуджують пружні коливання. Залежно від виду деформації пружних елементів конструкцій розрізняють поздовжні, поперечні та крутильні коливання.

При поздовжніх коливаннях переміщення всіх точок пружного стрижня спрямовані уздовж осі стрижня. При цьому спостерігаються деформації подовження або укорочення стрижня, тобто коливання розтягування і стиснення.

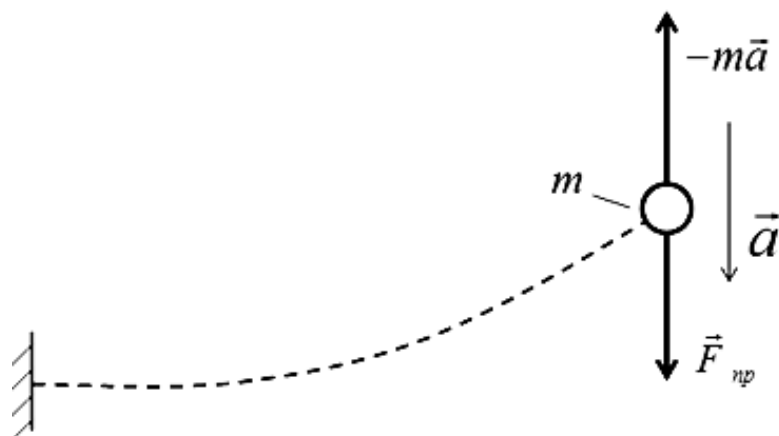


Рис. . 5. Дія сили інерції на конструкцію

Поперечними називають коливання вигину, при яких прогини спрямовані перпендикулярно до осі стрижня. Напружений стан при поперечних коливаннях буде таким же, як і при статичному вигині балки. Тому поперечні коливання інакше можна назвати згинальними.

Крутильними називають коливання стрижнів, які супроводжуються деформацією крутіння.

Крім перерахованих видів коливань існують коливання змішаного типу, коли одночасно виникають різні деформації, наприклад, вигину і крутіння крила. Такі коливання називають згинально-крутильними.

За фізичною сутністю коливання поділяють на вільні, вимушені, параметричні і самозбудні. У практиці експлуатації літаків важливо визначити види коливань, що виникають як у польоті, так і на землі. Залежно від цього потрібно знаходити шляхи запобігання ним, оскільки коливання призводять до динамічного навантаження конструкції і витрати її ресурсу.

Власними (вільними) називають коливання, які виникають в ізолюваній системі внаслідок зовнішнього збудження, що викликає початкове відхилення точок системи від положення рівноваги або

початкові швидкості. Власні коливання тривають завдяки наявності внутрішніх пружних сил, що відновлюють рівновагу. Власні коливання тривають до тих пір, поки отримана на початку коливального процесу енергія не буде повністю витрачена на роботу проти сил тертя об повітря або сили внутрішнього тертя в матеріалі.

При власних коливаннях характер коливального процесу в основному визначається тільки внутрішніми силами системи, що залежать від її фізичної будови. Період коливань (час одного повного коливання) або частота коливань (величина, зворотна періоду) залежить від самої системи. Частота коливань є цілком певною для системи і називається власною частотою коливань системи. Вільні коливання через втрати енергії в системі практично завжди є згасаючими.

Вимушеними називають коливання пружної системи, що відбуваються в результаті дії на систему заданих зовнішніх періодичних або неперіодичних збуджуючих сил. Характер коливального процесу залежить від властивостей системи та виду зовнішньої сили. Вимушені коливання у загальному випадку не загасають, вони можуть бути спричинені силовим або кінематичним збудженням конструкції. Силове збудження відбувається від дії сил або моментів, кінематичне – внаслідок надання деяким точкам системи певного руху. Коливання ЛА, що викликані неспокійною атмосферою, є вимушеними. Інтенсивні коливання відбуваються в процесі приземлення літака. Для вертольота характерні так звані нормально обумовлені вібрації, які виникають у звичайному горизонтальному польоті при косому обдуванні лопатей.

Колівальний процес відбувається з частотою вимушених коливань і підтримується через безперервне надходження енергії ззовні. При збігу частоти збуджуючих сил із частотою власних коливань системи настає резонанс, що характеризується різким зростанням амплітуди вимушених коливань і супроводжується виникненням у конструкції неприпустимих деформацій.

Параметричні коливання спричинені початковим збуренням і підтримуються параметричним збудженням (незалежно від стану системи зміни у часі її параметрів: коефіцієнтів жорсткості, інерції або демпфірування).

При автоколиваннях у систему надходить енергія від джерел неколивальної природи. При цьому надходження енергії залежить від руху системи і регулюється нею.

За кінематичним принципом коливання поділяють на періодичні та неперіодичні, детерміновані та випадкові, стаціонарні та нестаціонарні.

Якщо повна енергія системи не зростає і не спадає, то систему називають консервативною; якщо зростає або спадає, – неконсервативною (відповідно активною та пасивною). Активна система є автоколивальною, адже має власне джерело енергії.

Застосування теорії коливань у кожному конкретному випадку передбачає певну ідеалізацію реальної системи – побудову моделі й написання для неї відповідних рівнянь (звичайних диференціальних, у часткових похідних і т. ін.).

Лінійними називають системи, які описуються лінійними диференціальними рівняннями; нелінійні системи – нелінійними. Лінійні коливання – це коливання малої амплітуди. Для них характерним є адитивний відклик на адитивні впливи (виконується принцип суперпозиції). Рівняння лінійних коливань отримують у результаті лінеаризації вихідної моделі. Більш повний підхід свідчить про те, що коливальні процеси є нелінійними.

З основами теорії коливань студенти - механіки вже ознайомилися в курсах математики, фізики і теоретичної механіки. У посібнику наведені домашні завдання з дисципліни «Стійкість і коливання пружних систем» з необхідними теоретичними зауваженнями і методичними вказівками щодо коливань пружних систем. Основну увагу приділено власним і вимушеним коливанням лінійних систем з одним або декількома степенями вільності. Реальна конструкція має нескінченне число степенів вільності. Розгляд систем з обмеженим числом степенів вільності пов'язаний з великим значенням таких спрощених систем у процесі практичних вібраційних розрахунків. Коливання систем із розподіленими параметрами пояснюється на основі класичних методів Релея і методу, оснований на розкладанні руху за власними формами коливань.

Для наочного розуміння методів теорії коливань наведені приклади їх застосування при аналізі ряду типових прикладних задач. Особливу увагу приділено поєднанню наочних фізичних міркувань із математичними викладками, які мають формальний характер.

Як показує досвід, одна з головних труднощів при опануванні теорії полягає у тому, щоб навчитися, з одного боку, перетворювати фізично поставлену задачу на математично сформульовану проблему, а з іншого боку – усвідомити фізичний сенс математичних результатів.

У процесі виконання домашніх завдань студентам буде потрібно знання курсів щодо статички, кінематики та динаміки механічних систем, механіки матеріалів, теорії пружності та будівельної механіки. Слід орієнтуватися в математичному аналізі, знати елементарні поняття теорії матриць. Матрична форма подання рівнянь руху дозволяє широко використовувати прикладні пакети програм на ЕОМ.

Домашні завдання присвячені аналізу вільних і вимушених коливань систем із декількома степенями вільності. Це дозволяє знайти частоти і форми власних коливань, які є найважливішими динамічними характеристиками конструкції. Знаючи ці характеристики, можна отримати рішення задачі про вимушені коливання конструкції (її динамічної реакції) на збурення, досліджувати автоколивання і стійкість авіаційної конструкції.

Навчальний посібник є корисним при вивченні дисциплін «Стійкість і коливання пружних систем», «Переддипломний курс» і «Аеропружність конструкцій», а також при виконанні дипломного проекту в процесі аналізу динамічних процесів, що відбуваються на ЛА в процесі його експлуатації. Автор сподівається, що посібник сприятиме чіткому розумінню зв'язку між математичними методами і фізичною природою механічних коливань.

Завдання № 1

Визначення частоти власних коливань механічної системи з одним ступенем вільності

Всі механічні системи, які мають маси і пружні елементи, здатні здійснювати різні види коливань – вільні, вимушені, автоколивання і т. ін. Отже, всі машини і конструкції при роботі зазнають вібрації. Система, яка здатна коливатися, називається коливальною. Виникає потреба аналізу коливальних процесів, що відбуваються в конструкції, та запровадження заходів боротьби з небезпечними вібраціями. Вібрації використовують на практиці і в корисних цілях (віброзанурення паль, вібротранспортування вантажів).

Першим кроком до розуміння коливальних процесів є вивчення вільних коливань, а в системі з одним ступенем вільності – визначення частоти власних коливань.

Частота власних коливань конструкції – важливий параметр, що дозволяє уникнути резонансу в конструкції, тобто збігу частоти зовнішнього впливу з власною частотою. Резонанс – небезпечне явище в процесі експлуатації ЛА. При наближенні частоти зовнішнього впливу до частоти власних коливань системи в конструкції збуджуються підвищені вібрації, виникають великі сили інерції і дуже швидко витрачається ресурс конструкції. Засобами боротьби з небезпечними вібраціями є так звана частотна відбудова конструкції та використання демпферів. Інженер має знати основні чинники і параметри, що впливають на частоту власних коливань системи. Дуже часто на практиці при дослідженні вільних коливань обмежуються розрахунком частоти власних коливань.

Конструкція ЛА у загальному випадку має нескінченну кількість ступенів вільності. Числом ступенів вільності механічної системи називають число незалежних координат, що визначають її положення. Залежно від характеру явищ, що розглядаються, і необхідної точності можна обмежити число ступенів вільності системи. Це значно спрощує аналіз системи. Для цього як розрахункову схему реальної конструкції вибирають таку, що має декілька і навіть одну ступінь вільності.

Зовнішні збурювальні сили при вільних коливаннях відсутні. Вільні коливання виникають після початкового збудження системи – відхилення системи від положення рівноваги або надання їй точкам швидкостей. Характеристики вільних коливань (форми та частоти) визначаються жорсткісними і масовими властивостями системи. У реальних конструкціях

завжди існують сили тертя (демпфірувальні сили), які здійснюють від'ємну роботу. Тому частина енергії при коливаннях перетворюється на тепло, тобто відбувається розсіювання енергії (демпфірування коливань). Системи, в яких діють сили тертя, називаються неконсервативними.

У консервативних системах нехтують демпфіруванням коливань, тобто не враховують сили тертя. У цьому разі система є ізольованою від навколишнього середовища і запас енергії в процесі вільних коливань є постійним. Вільні коливання в консервативних системах відбуваються з власними частотами, які залежать тільки від характеристик системи.

Демпфірування мало впливає на величину нижчої власної частоти (основного тону коливань) і при виконанні завдання не буде враховано.

Розглянемо консервативні механічні системи, що мають тільки один степінь вільності і здійснюють вільні коливання. Закономірності, що будуть встановлені для них, мають велике практичне значення і можуть бути з певними обмеженнями перенесені й на більш складні системи.

Мета завдання – визначити частоту власних коливань конструкції з одним ступенем вільності за відсутності сил тертя.

Для цього необхідно:

- встановити узагальнену координату, що задає положення механічної системи;
- дослідити стійкість механічної системи в положенні рівноваги;
- визначити вид руху (поступальний або обертальний) елементів системи, що мають масу;
- встановити сили, що діють на систему, і закон їх зміни як функція узагальненої координати;
- записати рівняння руху механічної системи;
- знайти частоту власних коливань і проаналізувати вплив на неї основних конструктивних параметрів системи.

Теоретичні положення і методичні вказівки до виконання домашнього завдання

Припущення і гіпотези

З метою спрощення розрахунків і аналізу системи далі прийняті такі припущення і гіпотези:

- коливальна система має один степінь вільності;
- параметри системи підібрані такими, що положення рівноваги системи є стійким;

- розглядаються малі коливання системи. Вважають, що матеріал конструкції знаходиться в лінійно - пружній області;
- систему вважають лінійною, а принцип незалежності дії сил – справедливим;
- у системі відсутнє демпфірування – розглядається консервативна система.

Розрахункова схема механічної системи

На практиці коливальні системи складаються з нескінченної кількості матеріальних точок і мають нескінченне число степенів вільності. Для спрощення розрахунків проводять їх схематизацію – реальну систему замінюють розрахунковою моделлю – спрощеною системою з однією, двома або декількома степенями вільності.

Обмеження числа степенів вільності, що враховуються, може бути здійснено різними способами.

Згідно з *першим способом* треба виділити елементи, що мають маси і деформацією яких можна знехтувати; виділити пружні елементи, масу яких можна не враховувати. У цьому випадку розрахункова схема буде являти собою ряд жорстких масивних тіл, з'єднаних пружними елементами.

На рис. 6, а, б показані системи, які мають один степінь вільності, оскільки масу пружини (вала) *прийнято* малою щодо маси твердого тіла (вантажувача або диска).

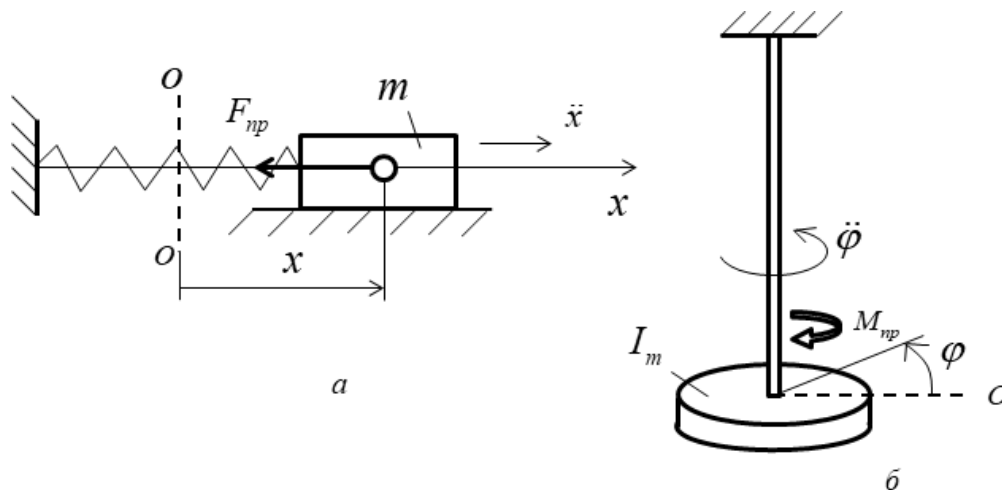


Рис. 6. Поступальний і обертальний рухи масивних тіл

Форма (положення) системи визначається однією узагальненою координатою q . При поступальному русі вантажу (рис. 6, а) – це координата x , а при обертанні диска (рис. 6, б) – кут повороту φ .

Відмітимо, що координати слід відраховувати від положення стійкої рівноваги системи. Про це сказано нижче. Положення рівноваги систем, які показані на рис. 6, визначається просто. В цьому положенні пружні елементи (пружина або вал, що закручується) є недеформованими.

Другий спосіб обмеження числа степенів вільності полягає в тому, що розподілені за об'ємом системи властивості піддатливості конструкції (можливість їх деформування) локалізуються в скінченному числі точок.

На рис. 7,а показано балку з безперервним розподілом маси. Ця система має нескінченне число степенів вільності. Її можна наближено замінити рядом жорстких стрижнів, які з'єднані шарнірами з пружинами (рис. 7, б, в). Системи, зображені на рис. 7, б і 7, в, мають відповідно один і два степеня вільності.

Третій спосіб оснований на апріорному заданні форми руху системи (метод Релея). Цей підхід буде наведений при виконанні домашнього завдання № 3.

У запропонованих варіантах завдань (див. табл. 1) наведені системи з одним ступенем вільності. Вони мають тільки одну власну частоту. Необхідно визначити, який рух здійснюють масивні тіла системи щодо сталого положення рівноваги (поступальний або обертальний), і встановити узагальнену координату q системи. Як узагальнену координату слід вибрати лінійне переміщення x або кут повороту φ (рис. 7).

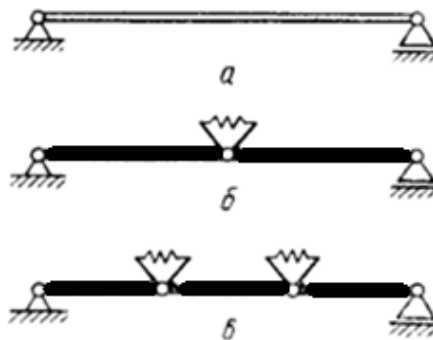


Рис. 7. Сукупність пружно з'єднаних жорстких елементів

Стійкість положення рівноваги системи

При аналізі вільних коливань важливим є визначення положення рівноваги механічної системи й дослідження стійкості в цьому положенні рівноваги. Вільні коливання відбуваються щодо стійкого положення рівноваги.

Як відомо, потенціальна енергія системи Π – це функція узагальненої координати q

$$\Pi = \Pi(q). \quad (1)$$

Узагальнену координату відраховують від положення рівноваги системи. Поблизу $q=0$ розкладаємо потенціальну енергію $\Pi = \Pi(q)$ у ряд Маклорена

$$\Pi = \Pi(0) + \Pi'(0)q + \frac{\Pi''(0)q^2}{2} + \dots \quad (2)$$

Вважаємо, що в положенні рівноваги $\Pi(0) = 0$. Крім того, в цьому положенні похідна від потенціальної енергії за координатою q дорівнює узагальненій силі, взятій з протилежним знаком:

$$\Pi' = -Q. \quad (3)$$

Відомо, що узагальнена сила в положенні рівноваги $Q = 0$. Отже, кінець кінцем з (2) одержимо вираз

$$\Pi = \Pi''(0) \frac{q^2}{2} = \frac{cq^2}{2}, \quad (4)$$

де стала c – узагальнений коефіцієнт жорсткості, який є другою похідною від потенціальної енергії системи

$$c = \Pi''(0). \quad (5)$$

Згідно з теоремою Лагранжа – Діріхле достатньою умовою стійкості консервативної системи в положенні рівноваги є мінімум потенціальної енергії в цьому положенні, тобто необхідне виконання вимоги

$$\Pi''(0) > 0. \quad (6)$$

Отже, стала c поблизу стійкого положення рівноваги має бути додатною – $c > 0$.

Для визначення узагальненого коефіцієнта жорсткості c достатньо побудувати вираз потенціальної енергії у вигляді квадратичної функції узагальненої координати q (її відлік слід вести від положення рівноваги). Якщо $c < 0$, то положення рівноваги системи є нестійким – при довільному збуренні система відхиляється від початкового положення і рух не має коливального характеру.

На прикладі маси, підвешеної на невагомій пружині жорсткістю C (рис. 8), знайдемо положення рівноваги заданої механічної системи і визначимо стійкість цього положення рівноваги.

Нехай точка O_1 відповідає положенню нерозтягнутої пружини. Переміщення вантажу при поступовому збільшенні навантаження будемо

відраховувати від цієї точки. Очевидно, що в положенні рівноваги вантажу (положення $O - O$) сила пружності пружини врівноважується силою тяжіння

$$F_{\text{пр}} = G. \quad (7)$$

Положення рівноваги вантажу характеризується координатою δ_{cm} .

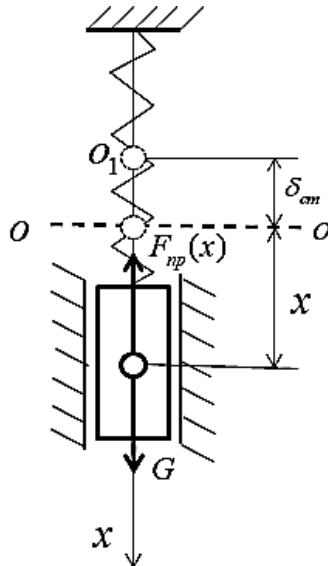


Рис. 8. Положення стійкої рівноваги системи

Як відомо, при малих деформаціях сила пружності змінюється за лінійним законом: чим більше сила, тим більше переміщення вантажу. Закон зміни сили пружності залежно від деформації пружини (подовження пружини x') показаний на рис. 9. Очевидно, що $x' = x + \delta_{cm}$, координату x відраховують від положення рівноваги. Якщо вантаж відхилити на величину x' , то сила, яка необхідна для його подовження, буде

$$F_{\text{пр}}(x') = Cx', \quad (8)$$

де C – коефіцієнт пропорційності – жорсткість пружини, Н / м.

Якщо в системі наявні циліндричні пружини, то їх жорсткість можна обчислити за формулою

$$C = \frac{Gr^4}{4R^3n}, \quad (9)$$

де G – модуль зсуву матеріалу; n – кількість витків пружини; r – радіус дроту.

Жорсткість циліндричної пружини знаходимо для випадку, коли крок витків порівняно з радіусом R пружини малий – $h \ll 2R$ (кут нахилу витків малий). Нагадаємо, що деформація пружини в основному визначається скручуванням витків пружини від дії крутильного моменту.

Як впливає із співвідношень (7) і (8), статичне подовження пружини

$$\delta_{cm} = G/C \quad (10)$$

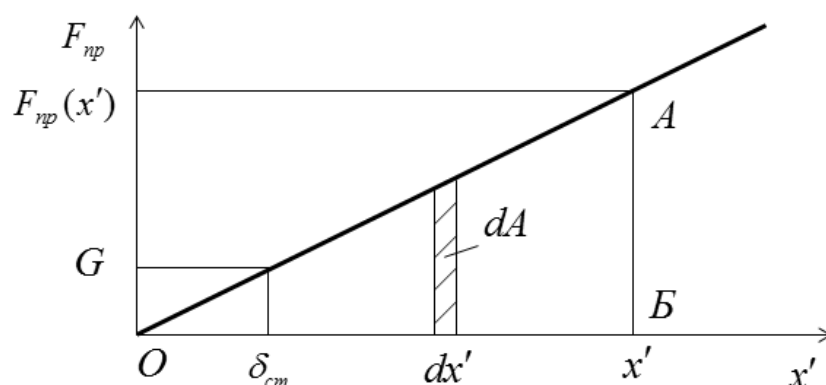


Рис. 9. Зміна сили пружності при деформації пружини

Нехай вантаж через початкове збурення відхилився від положення рівноваги на x . На вантаж діють сили тяжіння і пружності. Сума їх проекцій на вісь x визначається дуже просто:

$$\sum F_x = G - C(x + \delta_{cm}) = -Cx. \quad (11)$$

Як видно, сила пружності є відновлювальною силою, яка прагне повернути тіло до вихідного положення. Коефіцієнт пропорційності C характеризує жорсткість зв'язку, тобто він дорівнює силі, яку потрібно прикласти, щоб отримати переміщення, що дорівнює одиниці.

Фізична природа відновлюваної сили може бути різною: наприклад, це складова сили тяжіння маятника (математичного або фізичного), який виведений з положення рівноваги; сила інерції при розгляді коливальних систем, що обертаються, і т. ін.

Покажемо, що положення рівноваги вантажу системи є стійким. Обчислимо потенціальну енергію системи вісно до рівня O_l . Для цього підрахуємо роботу консервативних сил тяжіння і пружності за поверненням вантажу в це положення. Робота сили тяжіння є від'ємною, оскільки напрямок сили і переміщення не збігаються:

$$A(G) = -mgx'. \quad (12)$$

Робота сили пружності – це площа трикутника OAB (рис. 9), вона складається з елементарних робіт dA :

$$A(F_{пр}) = \sum dA = \frac{Cx'^2}{2}. \quad (13)$$

Робота сили пружності є позитивною, оскільки напрямок сили і переміщення маси збігаються.

Відомо, що потенціальна енергія системи – це робота, яку виконують сили при поверненні тіла з даного положення у вихідне. За вихідне прийнято положення, що відповідає точці O_1 . У точці O_1 потенціальну енергію вважаємо такою, що дорівнює нулю. Тому потенціальна енергія системи (вантажу і пружини) буде

$$\Pi(x') = A(G) + A(F_{\text{пр}}) = -mgx' + \frac{Cx'^2}{2}. \quad (14)$$

Залежність $\Pi(x')$ показана на рис. 10. Відзначимо, що в положенні рівноваги системи потенціальна енергія набуває мінімального значення. Факт мінімуму потенціальної енергії має фундаментальне значення і називається принципом мінімуму потенціальної енергії системи в положенні стійкої рівноваги.

Оскільки $c = \Pi''(0)$, то, двічі диференціюючи вираз (14), одержуємо умову стійкої рівноваги системи

$$c = C > 0. \quad (15)$$

Таким чином, вантаж після збурення здійснює коливальні рухи близько вихідного положення рівноваги. На практиці через дію сил тертя, завжди наявних у реальності, вантаж, здійснюючи згасаючі коливання, з часом повертається в положення рівноваги.

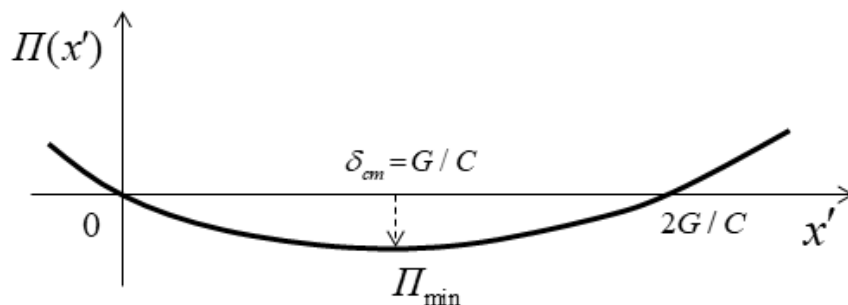


Рис. 10. Зміна потенціальної енергії системи

Координату x , що задає положення системи, завжди відраховують від положення стійкої рівноваги системи.

Рівняння вільних коливань лінійної консервативної системи

Після вибору розрахункової схеми системи необхідно скласти рівняння її руху. Це дозволить знайти частоту власних коливань.

Існує декілька підходів до складання рівнянь руху системи:

– *основний*, який базується на складанні рівняння Лагранжа II роду. Для їх формування попередньо необхідно записати вирази потенціальної і кінетичної енергій системи як функції незалежної узагальненої координати.

На практиці іноді простіше скористатися *загальним рівнянням динаміки* – прикласти до системи крім заданих сил згідно з принципом Даламбера сили інерції і записати умову динамічної рівноваги, скориставшись *принципом можливих переміщень* – віртуальна робота всіх сил на можливому переміщенні системи має дорівнювати нулю. Отримане рівняння буде збігатися з рівнянням Лагранжа II роду;

– *прямий* – маса відокремлюється від пружних елементів системи, і для неї записується диференціальне рівняння руху. При поступальному русі застосовують теорему про рух центру мас, а при обертальному – теорему про зміну моменту кількості руху. Реакції зв'язків виражаються через переміщення і швидкості системи;

– *зворотний* – маси системи відокремлюються від «скелета» системи. Потім аналізують деформацію цього без масового «скелета» під дією заданих зовнішніх сил і сил інерції.

В рівняннях Лагранжа II роду система зводиться до обмеженої кількості степенів вільності n . Для кожної узагальненої координати справедливе рівняння

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i; \quad i = 1, \dots, n, \quad (16)$$

де n – число степенів вільності системи; q_i – узагальнена координата; T – кінетична енергія; Q_i – узагальнені сили, які залежать від зовнішнього впливу. Це аеродинамічні сили, сили демпфірування (сили опору), пружні сили. Визначають узагальнені сили як суму робіт діючих сил на можливих переміщеннях

$$Q_i = \sum_j \vec{F}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i},$$

де \vec{F}_j – сила, що діє на частинку j ; $\delta \vec{r}_j$ – можливе переміщення, на якому сила здійснює роботу. Це переміщення спричинено зміною узагальненої координати q_i

$$\delta \vec{r}_j = \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \delta q_i .$$

Узагальнена сила надзвичайно просто визначається для консервативних сил, до яких відносяться сили пружності

$$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad (17)$$

де U – потенціальна енергія, що накопичена в системі.

Сили опору руху (конструкційне демпфірування, сили тертя в з'єднаннях) – неконсервативні, їх роботу слід визначати за формулою (17).

Кінетичну енергію системи при малих коливаннях визначають як суму енергій окремих її елементів. Вона має вигляд

$$T = \sum \frac{dm_i V_i^2}{2}; \quad i = 1 \dots n, \quad (18)$$

де dm_i – елементарна маса;

V_i – швидкість елементарної маси, яка залежить від узагальненої швидкості.

Для системи з одним ступенем вільності кінетична енергія може бути наведена у вигляді

$$T = \frac{1}{2} m_{np} \dot{q}^2, \quad (19)$$

де m_{np} – приведена маса (коефіцієнт інерції або узагальнена маса);

\dot{q} – швидкість зміни узагальненої координати (узагальнена швидкість).

Як видно з (19), для визначення m_{np} достатньо записати вираз для кінетичної енергії системи згідно з (18). Підсумовування енергій розповсюджується по усіх елементах системи. Коефіцієнт при узагальненій швидкості і є приведена маса системи.

Розглянемо приклад визначення рівняння руху системи (рис. 11) з одним ступенем вільності, використовуючи різні підходи. Основні закономірності, що будуть встановлені на цьому простому об'єкті, можна надалі використовувати і для аналізу більш складних систем. Маса m закріплена на кінці невагомої консольної балки з постійною згинальною жорсткістю EI . З балкою пов'язано систему координат $Oxuz$. Узагальнена координата u визначає положення системи.

Запишемо співвідношення, що описують рух пружної конструкції – її вільних коливань, використовуючи *рівняння Лагранжа II роду* (16).

На рис. 11 зображено систему у відхиленому від рівноваги положенні. Розглядаємо тільки додаткові сили, що виникають у системі після дії початкового збурення.. Зовнішні сили в площині uz відсутні. На рисунку

показані внутрішні сили, що діють між балкою і масою, а також в елементі балки. На масу діє внутрішня сила F_{np} – реакція пружної конструкції. Така ж сила, але протилежно спрямована, діє на безмасову консоль. Розподілені по довжині балки згинальні моменти $M_{z_c}(z)$ (внутрішні силові чинники) деформують конструкцію, в якій накопичується потенціальна енергія пружних сил.

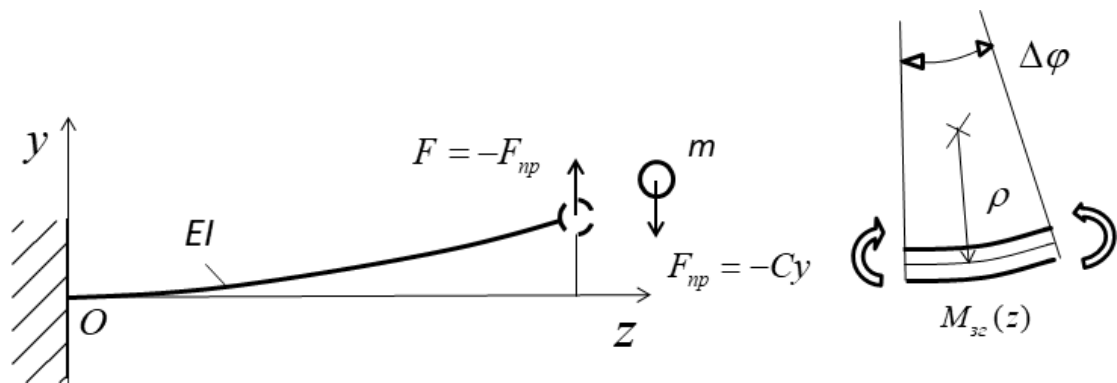


Рис. 11. Пружна конструкція з одним ступенем вільності

Вважаємо, що матеріал балки веде себе лінійно. Кінетична енергія системи – це енергія поступального руху дискретної маси

$$T = \frac{m\dot{y}^2}{2}, \quad (20)$$

де \dot{y} – швидкість маси.

Потенціальна енергія, яка накопичується в балці, пов'язана з дією згинальних моментів і викривленням осі балки. Вона дорівнює роботі сили $F = -F_{np} = -Cy$, яку потрібно прикласти на кінці балки для її вигину на величину y :

$$U = -A(F) = \frac{1}{2}Cy \cdot y = \frac{Cy^2}{2}, \quad (21)$$

де C – жорсткість балки в точці розміщення маси. Для її визначення достатньо прикласти на кінці балки одиничну силу і знайти переміщення δ_{11} , що відповідає силі. Тоді

$$C = 1/\delta_{11}. \quad (22)$$

Очевидно, що часткові похідні становлять

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial y} &= 0; & \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} &= m\dot{y}; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) &= m\ddot{y}; & Q &= -\frac{\partial U}{\partial y} = -Cy. \end{aligned} \quad (23)$$

Підставивши вирази (23) в (16), одержимо рівняння поступального руху маси m у вигляді

$$m \ddot{y} = -Cy.$$

Легко бачити, що це рівняння можна отримати на основі другого закону Ньютона.

Якщо позначити $C/m = \omega_{вл}^2$, то знайдемо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку – рівняння вільних коливань маси

$$\ddot{y} + \omega_{вл}^2 y = 0, \quad (24)$$

де $\omega_{вл}$ – коефіцієнт, який, як буде встановлено нижче, є круговою частотою власних коливань системи

$$\omega_{вл} = \sqrt{C/m}. \quad (25)$$

Визначення руху системи з використанням рівнянь Лагранжа II роду має свої переваги. Треба виконати формальні процедури: задати узагальнену координату, записати вирази для кінетичної і потенціальної енергій системи і визначити похідні, а також знайти узагальнену силу. Але зробимо певне застереження. Такий спосіб вирішення має недостатню наочність, а формальні математичні дії приховують важливий для інженера фізичний сенс.

Пояснимо рівняння динаміки більш ґрунтовно.

У вихідному нерухомому положенні сила тяжіння $G = mg$ врівноважена силою пружності балки. Вільні коливання розпочинаються після початкового збурення – відхилення маси від рівноважного положення і надання їй швидкості. У процесі коливань силу тяжіння, як було показано вище, можна не враховувати і розглядати сили пружності, що викликані додатковою деформацією пружної системи.

Скористаємося загальним рівнянням динаміки матеріальної системи. Прикладемо до системи крім заданих сил сили інерції (рис. 12) і запишемо умову динамічної рівноваги, скориставшись принципом можливих переміщень – віртуальна робота всіх сил на можливому переміщенні системи має дорівнювати нулю

$$\sum \delta A(F) = 0.$$

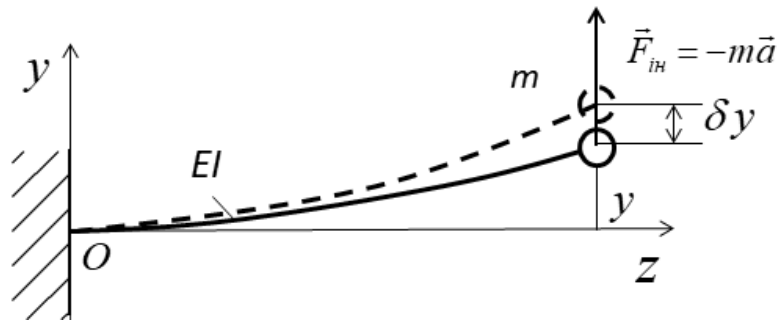


Рис. 12. Динамічна рівновага системи

Можливим переміщенням системи є нескінченно мале вертикальне переміщення маси δy , що задовольняє в'язям у системі. При цьому балка деформується. В елементах балки виникають додаткові кути повороту $\delta\Delta\varphi$ перерізів (рис. 11). Враховуємо дію згинальних моментів на можливих переміщеннях балки. Очевидно, що сума елементарних робіт внутрішніх сил пружності дорівнює елементарній роботі сили $F = -Cy$, яка діє на кінці балки

$$\delta A(F) = -Cy\delta y.$$

Віртуальна робота сили інерції

$$\delta A(F_{in}) = -m\ddot{y}\delta y.$$

Підсумовуючи віртуальні роботи, маємо умову рівноваги системи:

$$-m\ddot{y}\delta y - Cy\delta y = 0.$$

Як видно, отримали те ж саме рівняння руху (24).

Рівняння руху системи згідно з *прямим підходом* складемо на основі теореми про рух центру мас. На рис. 13 показано масу, яка вирізана із системи. До неї прикладені сили з боку балки.

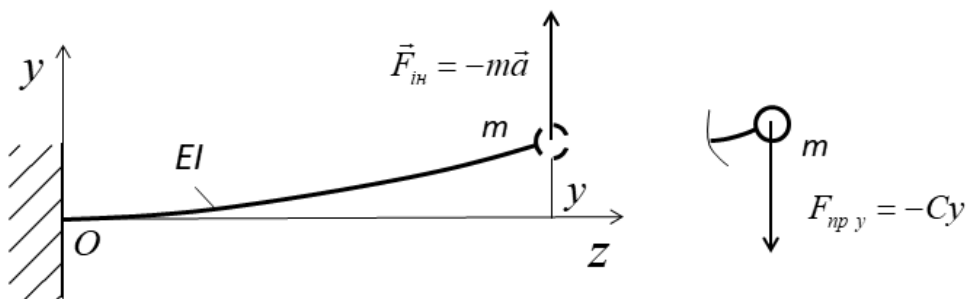


Рис. 13. Прямий спосіб запису руху маси

У відхиленому положенні на масу діє сила пружності, що залежить від величини зміщення. Запишемо другий закон Ньютона у векторній формі

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}. \quad (26)$$

Прискорення уздовж осі y – це похідна від швидкості або друга похідна від координати

$$a_y = \frac{d V_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} = \ddot{y}. \quad (27)$$

У проекції на вісь y рівняння руху має вигляд

$$m\ddot{y} = -F_{\text{пр}}(y) = -Cy. \quad (28)$$

Звідси видно, що при додатній координаті y прискорення від'ємне і спрямовано протилежно осі y в сторону діючої сили.

Відповідно до зворотного способу запису руху масу слід відокремити від балки –«скелета» системи (рис. 14).

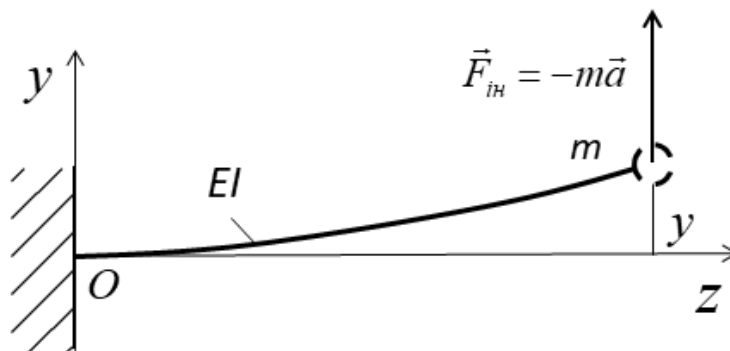


Рис. 14. Зворотний спосіб запису руху системи

Деформація балки як лінійної системи від дії сили інерції визначається на основі принципу суперпозиції. Якщо відоме одиничне переміщення δ_{11} , то пружне переміщення, яке викликано силою $(-m\ddot{y})$, буде

$$y = \delta_{11}(-m\ddot{y}). \quad (29)$$

Коефіцієнт піддатливості δ_{11} пов'язаний з жорсткістю C співвідношенням

$$\delta_{11} = 1/C. \quad (30)$$

Підставляючи (30) в (29), одержуємо знову рівняння (24). Таким чином, три підходи привели до однакового результату.

Енергетичний метод може бути ефективним для систем, що складаються з декількох мас. Він дає можливість отримати так званий перший інтеграл руху.

Зовнішні сили, що прикладені до системи, як правило, потенціальні. Тому можна скористатися законом збереження повної механічної енергії в процесі коливань:

$$T + \Pi = const, \quad (31)$$

де T і Π – кінетична і потенціальна енергії в довільний момент часу.

Частота власних коливань може бути встановлена з рівняння (31), записаного для двох моментів часу

$$T_1 + \Pi_1 = T_2 + \Pi_2, \quad (32)$$

де T_1 – кінетична енергія маси в положенні рівноваги системи, приймаємо, що в цьому положенні $\Pi_1 = 0$;

Π_2 – потенціальна енергія в момент найбільшого відхилення, коли $T_2 = 0$.

У процесі гармонічного руху величини T_1 і Π_2 є максимальними, тому отримуємо рівняння

$$T_{1\max} = \Pi_{2\max}, \quad (33)$$

з якого легко знайти частоту власних коливань.

На рис. 15 зображені два положення системи: 1 – рівноваги; 2 – найбільшого відхилення, воно відбувається за часом через чверть періоду власних коливань – $T/4$.

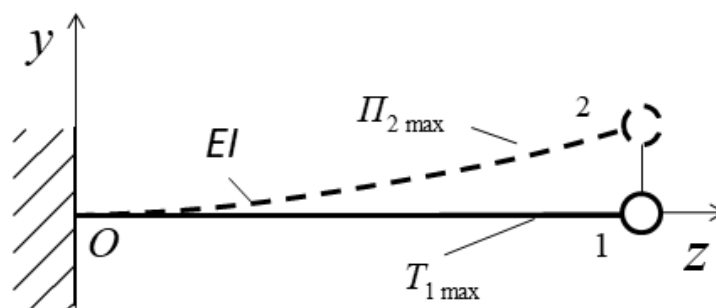


Рис. 15. Закон збереження повної механічної енергії в процесі коливань

У процесі гармонічного руху вертикальні переміщення маси відбуваються за законом

$$y = A \sin(\omega_{\text{вл}} t + \varepsilon), \quad (34)$$

де A і ε – амплітуда коливань і зсув фази. Отже, швидкість маси в довільний момент t

$$\dot{y} = A \omega_{\text{вл}} \cos(\omega_{\text{вл}} t + \varepsilon). \quad (35)$$

Підставляючи в (33) (34) і (35), одержуємо

$$CA^2 / 2 \sin(\omega_{\text{вл}} t + \varepsilon)^2 = mA^2 \omega_{\text{вл}}^2 / 2 \cos(\omega_{\text{вл}} (t + T / 4) + \varepsilon)^2,$$

або, враховуючи формули приведення,

$$CA^2 / 2 = mA^2 \omega_{\text{вл}}^2 / 2,$$

звідки легко одержати частоту власних коливань, яка збігається з формулою (25).

Метод Релея

Часто система з одним ступенем вільності являє собою ряд мас, з'єднаних жорсткими безмасовими стрижнями, тросами, шестернями і т. ін. (рис. 16).

Система здійснює малі вільні коливання відносно положення стійкої рівноваги, зображеного на рисунку. Легко бачити, що в цьому положенні пружина не zdeформована. Нехай за узагальнену координату беруть кутове положення $\varphi(t)$ шківа, який обертається. Переміщення маси m легко обчислити. З лінійною точністю

$$x(t) = \frac{a}{b} R \varphi(t). \quad (36)$$

Для визначення власної частоти системи можна залучити різні фізичні міркування.

Згідно з методом Релея використовують поняття ефективної маси (див. формули (17) і (18)). Це така маса, що еквівалентна в силовому відношенні всім розподіленим у системі масам.

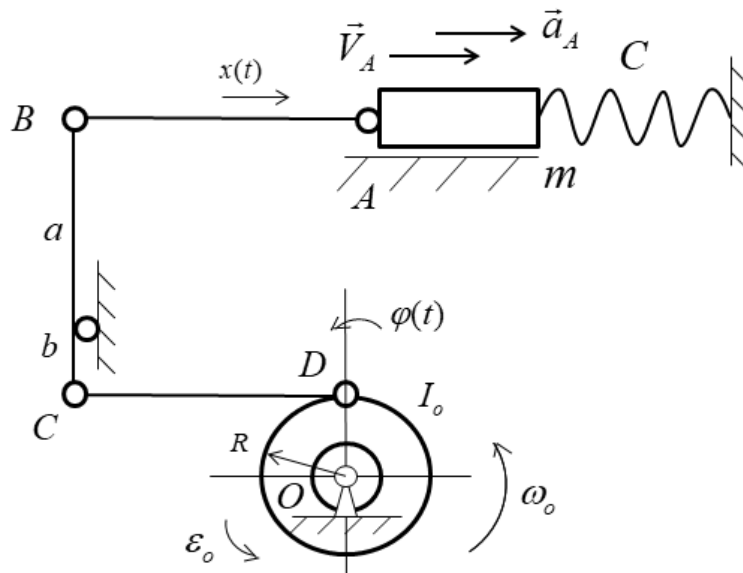


Рис. 16. Вільні коливання системи з одним ступенем вільності

Кінетична енергія механізму в довільному його положенні має бути такою ж, як і енергія після введення ефективної маси. Ефективна маса може бути розміщена в довільній точці механізму. Віднесемо її до точки А, тоді

$$T = \frac{m\dot{x}(t)^2}{2} + \frac{I_o\dot{\phi}(t)^2}{2} = \frac{m\dot{x}(t)^2}{2} + \frac{I_o\left[\frac{b}{a}R\dot{x}(t)\right]^2}{2} =$$

$$= \left\{ m + I_o\left(\frac{b}{a}R\right)^2 \right\} \frac{\dot{x}(t)^2}{2} = m_{\text{эф}A} \frac{\dot{x}(t)^2}{2}, \quad (37)$$

де $m_{\text{эф}A}$ – ефективна або еквівалентна маса, віднесена до точки А.

З (37) легко знайти $m_{\text{эф}A}$ за такою формулою:

$$m_{\text{эф}A} = \left\{ m + I_o\left(\frac{b}{a}R\right)^2 \right\}. \quad (38)$$

Слід зазначити, що швидкості елементів механізму в довільний момент часу отримані для конфігурації, що відповідає положенню рівноваги. З лінійною точністю нехтуємо зміною положень елементів механізму, оскільки розглядаються малі коливання системи.

Жорсткість у точці А обчислюється легко. Треба прикласти одиничну силу в точці А і записати лінійне співвідношення теорії пружності між одиничною силою, пружним переміщенням δ_{11} і жорсткістю

$$1 = \delta_{11} C_A.$$

Очевидно, що $C_A = C$, оскільки пружне переміщення пов'язано тільки з деформацією пружини жорсткості С.

Таким чином, механізм зведений до гармонічного осцилятора певної маси і жорсткості, який розглядався вище (див. рис. 8). Власну частоту знаходять з рівняння (25)

$$\omega_{\text{вл}} = \sqrt{C_A / m_{\text{эф}A}}. \quad (39)$$

Підставляючи (38) в рівняння (39), маємо

$$\omega_{\text{вл}} = \sqrt{\frac{C}{m + I_o\left(\frac{b}{a}R\right)^2}}.$$

Як видно, частота власних коливань залежить від жорсткості пружини і інертності всіх тіл системи – маси m і моменту інерції шківів I_o .

Ефективну масу (38) можна отримати і з інших міркувань: Треба обчислити силу, яка діє в точці A . Її причиною є сили інерції масивних елементів. Ця сила є реально діючою силою, вона виникає (передається через ланки механізму) від дії сили інерції маси $(-m\ddot{x}(t))$ і моменту сил інерції шківів $(-I_O\ddot{\varphi}(t))$:

$$F_{inA} = F_{inm} + F_{inI_O} = -m\ddot{x}(t) - I_O\ddot{\varphi}(t)\frac{b}{Ra} = -m_{ef}\ddot{x}(t). \quad (40)$$

Як видно, величина m_{efA} з рівняння (38) така ж, як і в (40).

Релей показав, що при обчисленні частоти можна врахувати пружність і розподілену масу елементів системи. Наприклад (див. рис. 16), в розрахункову схему ввести погонні маси пружини і важеля BC . Для цього треба зробити припущення щодо деформованої форми цих пружних елементів у процесі коливань.

Досить точні результати щодо нижчої частоти системи отримують, якщо як форму елемента беруть його пружну лінію від дії статичного навантаження [9].

Як приклад розглянемо коливання маси, закріпленої до пружини, масою якої нехтувати не можна (рис. 17). На практиці відносна маса пружних елементів щодо маси вантажу може бути одного порядку. Система, в якій враховано розподілену масу, має нескінченну кількість степенів вільності і відповідно – частот і форм власних коливань, оскільки розподілені маси пружини можуть здійснювати досить складні поздовжні коливання за різною формою.

Розглянемо її спрощену розрахункову схему, яка має один степінь вільності. Нехай тільки координата x задає положення всіх елементів системи.

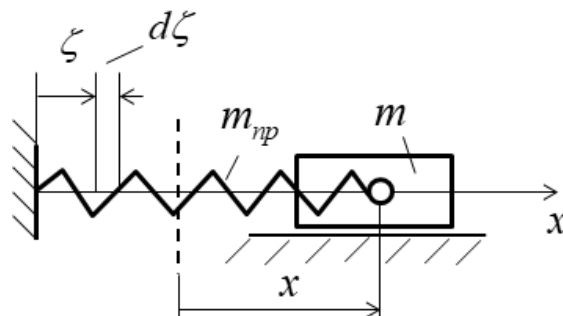


Рис. 17. Коливання системи з розподіленою масою

Координату ζ довільного елемента пружини при вільних коливаннях можна пов'язати з координатою x маси m , якщо припустити, що швидкість елементарної маси пружини

$$dm = \frac{m_{np}}{l} d\zeta$$

змінюється за лінійним законом

$$\dot{\zeta} = \dot{x} \frac{\zeta}{l}, \quad (41)$$

де l – довжина недеформованої пружини. Таке припущення впливає з того, що ми вважаємо подовження всіх елементів пружини однаковим. Тоді координата довільного елемента пружини буде

$$\zeta = x \frac{\zeta}{l}.$$

Підкреслимо, що це спостерігається в процесі статичного навантаження пружного елемента. Рівняння (41) буде доволі коректним при коливаннях системи за першою формою. До речі, отримана частота розрахункової схеми буде близькою до першої, нижчої частоти системи.

Кінетичну енергію пружини при наведених припущеннях визначають з інтеграла

$$T_{np} = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\dot{x} \frac{\zeta}{l} \right)^2 \frac{m_{np}}{l} d\zeta = \frac{1}{2} \frac{m_{np}}{3} \dot{x}^2. \quad (42)$$

Тоді очевидно, що сумарна приведена маса системи

$$m_{\Sigma} = m + m_{np} / 3,$$

а власна частота з урахуванням розподіленої маси пружини

$$\omega_{вл} = \sqrt{\frac{C}{m + m_{np}/3}}. \quad (43)$$

Як видно, при визначенні частоти до маси твердого тіла слід додавати одну третину маси пружини. Цей результат дає непогану точність розрахунку власної частоти [2, 9], якщо маса пружини має той же порядок, що і маса тіла. Наприклад, якщо $m = m_{np}$, то похибка при визначенні частоти за формулою (43), як показують точні оцінки, становить 0,8 %.

На рис. 18 показано консольну однорідну балку загальної маси m_0 , до якої на кінці закріплено зосереджену масу. Нехай погонна маса балки

постійна вздовж довжини – $m_n = m_\sigma / l$. Розподілена маса впливає на частоту власних коливань. Припустимо, що при коливаннях форма пружної лінії балки така ж, як і у випадку її статичного навантаження силою G .

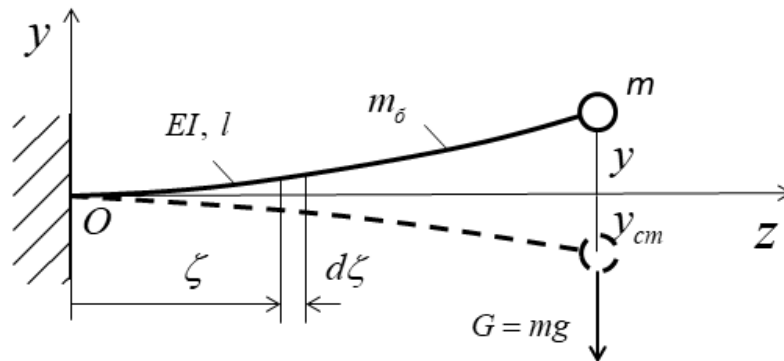


Рис. 18. Коливання системи з розподіленою масою

Позначимо через y_{cm} максимальне переміщення вантажу G , тоді переміщення довільного елемента балки, розташованого на відстані ζ від защемлення, буде

$$y(z) = y_{cm} \frac{3z^2 l - z^3}{2l^3}.$$

Кінетична енергія балки при коливаннях за прийнятою формою становить

$$T = \int_0^l \frac{m_\sigma / l}{2} (\dot{y}_{cm} \frac{3z^2 l - z^3}{2l^3})^2 dz = \frac{33}{140} m_\sigma \frac{\dot{y}_{cm}^2}{2}. \quad (44)$$

З (44) знайдемо ефективну (приведену) масу балки

$$m_{ef} = \frac{33}{140} m_\sigma.$$

Таким чином, при визначенні частоти за формулою Релея необхідно в (25) замість зосередженої маси m підставляти ефективну масу $(m + m_{ef})$.

Розв'язання диференціального рівняння руху

Вище було показано, що рівняння вільних коливань лінійних систем зводиться до диференціального рівняння

$$\ddot{y} + \omega_{вл}^2 y = 0.$$

Відома функція $y(t)$, друга похідна якої дорівнює самій функції, – це функція $\sin(t)$. Тому закон руху маси приймемо як

$$y(t) = \sin(\omega_{вл} t), \quad (45)$$

тоді прискорення маси

$$\ddot{y}(t) = -\omega_{\text{вЛ}}^2 \sin(\omega_{\text{вЛ}} t).$$

Отже, виконується співвідношення (24) і справедливий прийнятий закон руху.

З виразу (45) можна зробити висновок про те, що $\omega_{\text{вЛ}}$ – колова частота власних коливань.

Скористаємося теорією диференціальних рівнянь. Загальне рішення диференціального рівняння руху матеріальної точки (24) запишемо так:

$$y(t) = C_1 \cos \omega_{\text{вЛ}} t + C_2 \sin \omega_{\text{вЛ}} t. \quad (46)$$

Сталі C_1 і C_2 залежать від початкових умов, тобто від початкового положення матеріальної точки та її початкової швидкості. Їх визначають координатою y та її похідною \dot{y} в момент часу $t_0 = 0$:

$$y_0 = y(0); \quad V_0 = \dot{y}(0). \quad (47)$$

Тоді

$$C_1 = y_0, \quad C_2 = \frac{V_0}{\omega_{\text{вЛ}}}. \quad (48)$$

Запишемо загальний розв'язок рівняння (46) з урахуванням (47):

$$y = y_0 \cos \omega_{\text{вЛ}} t + \frac{V_0}{\omega_{\text{вЛ}}} \sin \omega_{\text{вЛ}} t = A \sin(\omega_{\text{вЛ}} t + \varphi_0). \quad (49)$$

Отримане рішення має таку геометричну інтерпретацію. Розглянемо рівномірний обертальний рух системи двох взаємно перпендикулярних жорстко пов'язаних один до одного векторів C_1 і C_2 (рис. 19).

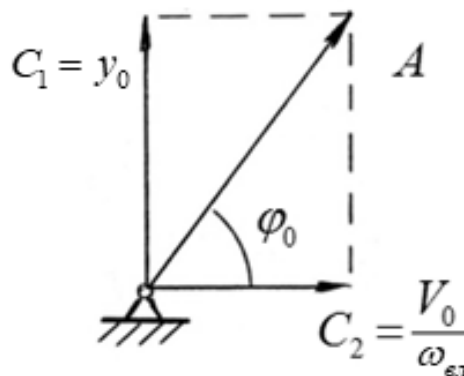


Рис. 19. Геометрична інтерпретація вирішення системи

Сума векторів C_1 і C_2 подана вектором

$$A = \sqrt{y_0^2 + \frac{V_0^2}{\omega_{\text{вЛ}}^2}}. \quad (50)$$

Початкове положення вектора A визначається кутом

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{y_0 \omega_{\text{вл}}}{V_0}. \quad (51)$$

На рис. 20 показано положення системи в момент t . При рівномірному обертанні системи з кутовою швидкістю $\omega_{\text{вл}}$ кут обороту вектора A

$$\varphi = \omega_{\text{вл}} t. \quad (52)$$

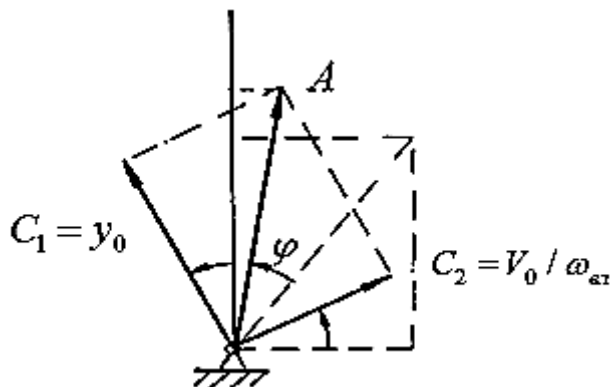


Рис. 20. Обертальний рух векторів C_1 і C_2

Проекція вектора A на вертикальну вісь y дорівнює сумі проєкцій на вісь його складових:

$$A_y = C_{1y} + C_{2y} = C_1 \cos \omega_{\text{вл}} t + C_2 \sin \omega_{\text{вл}} t. \quad (53)$$

У той же час проєкція вектора A на вісь y

$$A_y = A \sin(\omega_{\text{вл}} t + \varphi_0). \quad (54)$$

Коефіцієнт A дорівнює найбільшому значенню координати y , тобто найбільшому відхиленню матеріальної точки від положення рівноваги. Це і є амплітуда коливань.

Амплітуда коливань залежить від початкових вимог (y_0, V_0) і параметра $\omega_{\text{вл}}^2$, тобто від жорсткості пружної в'язі C та інерційності точки, що коливається.

Аргумент $(\omega_{\text{вл}} t + \varphi_0)$ називається фазою коливань, а φ_0 – початковою фазою.

Час одного оберту вектора A – це період коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{вл}}, \quad (55)$$

який дорівнює проміжку часу, після закінчення якого рух точки повністю повторюється. Величина, обернена до періоду коливань, називається частотою коливань:

$$f = \frac{1}{T} \quad (56)$$

(вимірюється в герцах (Гц) – числом коливань за одну секунду).

Параметр $\omega_{вл}$ – це кутова швидкість обертання системи векторів, зображених на рис. 20, називається коловою (циклічною) частотою і дорівнює кількості коливань за 2π секунд:

$$\omega_{вл} = \sqrt{C/m}. \quad (57)$$

Колова частота залежить від жорсткості пружини і маси вантажу і не залежить від початкових збурень. Чим більше жорсткість і менше маса, тим більше частота (розмірність частоти – рад/с). Колова частота називається власною, оскільки на систему не діють зовнішні сили.

Аналіз вирішення рівняння вільних коливань показує таке:

– вільні коливання – гармонічні, відбуваються щодо положення стійкої рівноваги;

– параметр $\omega_{вл}$ у рівнянні (45) – це колова частота власних коливань, яка залежить від характеристик жорсткості та масових характеристик системи і не залежить від початкових умов;

– амплітуду A і фазу φ_0 визначають із початкових умов.

Згасаючі коливання

При коливаннях реальної конструкції завжди існують сили тертя (рис. 21)., які перешкоджають руху. Це призводить до поступового зменшення амплітуди і загасання коливань. Змінюється і частота власних коливань.

До сил, що перешкоджають руху, відносяться сили тертя в кінематичних парах, сили опору повітря або в'язкого середовища, а також внутрішні сили непружного опору (внутрішнє конструкційне тертя).

За гіпотезою Фойгта для врахування внутрішніх сил опору руху в процесі коливань потрібно матеріал розглядати як пружнов'язкий. Напруження в ньому залежать не тільки від відносної деформації матеріалу ε , але і від швидкості зміни деформації:

$$\sigma = \varepsilon E + \chi E \varepsilon / t, \quad (58)$$

де χ – коефіцієнт в'язкого тертя. За гіпотезою Фойгта сили внутрішнього опору пропорційні швидкості руху:

$$F_{\text{терп}} = -\alpha \frac{dx}{dt}, \quad (59)$$

де α – коефіцієнт тертя.

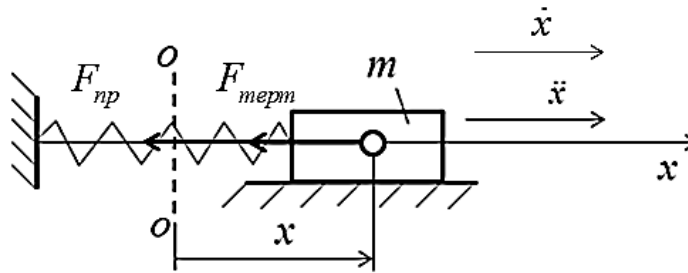


Рис. 21. Вільні коливання в системі з урахуванням тертя в системі

З урахуванням сили $F_{\text{терп}}$ рівняння вільних коливань набуває вигляду

$$x = \delta_{11} (F_{\text{ин}} + F_{\text{терп}}) = \delta_{11} (-m\ddot{x} - \alpha\dot{x}).$$

Перетворимо його до вигляду

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_{\text{вл}}^2 x = 0, \quad (60)$$

де $n = \frac{\alpha}{2m}$ – параметр, що характеризує втрати на тертя або інтенсивність зменшення амплітуди коливань. Він називається коефіцієнтом в'язкого демпфірування;

$\omega_{\text{вл}}^2 = 1 / \delta_{11} m = C / m$ – квадрат циклічної частоти вільних коливань за відсутності сил опору.

Рівняння (60) – звичайне диференціальне рівняння другого порядку, його називають рівнянням руху лінійного осцилятора. Воно описує системи з одним ступенем вільності з тертям. Як видно, число ступенів вільності дорівнює одиниці, це удвічі менше порядку диференціального рівняння.

Загальне рішення рівняння (60) у разі малого тертя ($n^2 < \omega_c^2$) наведемо так:

$$x(t) = e^{-nt} (C_1 \cos \omega_{\text{вл} \partial} t + C_2 \sin \omega_{\text{вл} \partial} t), \quad (61)$$

або

$$x(t) = e^{-nt} A \sin(\omega_{\text{вл} \partial} t + \varepsilon), \quad (62)$$

де $\omega_{\text{вл}\delta}$ – частота згасаючих вільних коливань (демпфрована власна частота):

$$\omega_{\text{вл}\delta} = \sqrt{\omega_{\text{вл}}^2 - n^2}. \quad (63)$$

Закон руху (62) встановлює згасаючі вільні коливання.

При $n \geq \omega_{\text{вл}}$ (випадок великого опору) спостерігається аперіодичний згасаючий рух.

При $n < \omega_{\text{вл}}$ рух має коливальний характер, але не є періодичним. Для граничного випадку між коливальним і неколивальним рухом

$$(\alpha / 2m)^2 = C / m,$$

знайдемо критичний коефіцієнт тертя

$$(\alpha_{\text{кр}} = 2m\sqrt{C / m} = 2m\omega_{\text{вл}}. \quad (64)$$

Довільне демпфірування можна охарактеризувати коефіцієнтом демпфірування

$$\zeta = \alpha / \alpha_{\text{кр}}, \quad (65)$$

і рівняння (60) набуде вигляду

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_{\text{вл}}\dot{x} + \omega_{\text{вл}}^2 x = 0. \quad (66)$$

З виразу (62) видно, що за проміжок часу, який дорівнює $\pi / \omega_{\text{вл}\delta}$, система проходить через стан рівноваги. Цим пояснюється коливальний характер руху.

Величина, що дорівнює

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_{\text{вл}\delta}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_{\text{вл}}^2 - n^2}}, \quad (67)$$

умовно називається періодом згасаючих коливань. З формули (67) видно, що період згасаючих коливань є більшим, ніж період вільних коливань системи за відсутності опору руху.

При малому терті можна наближено вважати, що

$$\omega_{\text{вл}\delta} = \omega_{\text{вл}} \sqrt{1 - n^2 / \omega_{\text{вл}}^2} \approx \omega_{\text{вл}}, \quad T_1 \approx T. \quad (68)$$

Множник Ae^{-nt} показує, що послідовні максимальні відхилення системи від положення рівноваги з плином часу зменшуються. При цьому відношення

$$\frac{x(t)}{x(t+T_1)} = \frac{e^{-nt} A \sin(\omega_{\text{вл}\delta} t + \varepsilon)}{e^{-n(t+T_1)} A \sin(\omega_{\text{вл}\delta} t + \omega_{\text{вл}\delta} T_1 + \varepsilon)} = e^{-nT_1}$$

не залежить від часу t .

Величина

$$\delta = \ln \frac{x(t)}{x(t+T_1)} = nT_1 \approx nT = n \frac{2\pi}{\omega_{вл}} = 2\pi\zeta \quad (69)$$

називається логарифмічним декрементом згасання і характеризує швидкість їх згасання.

При виконанні завдання сили тертя в системі не враховують. Крім того, отримані рівняння руху необхідно спростити, оскільки розглядаються малі відхилення системи від положення рівноваги. Тому рівняння руху треба лінеаризувати.

Приклади виконання завдання № 1

Задача 1

На кінці жорсткого стрижня довжиною l (рис. 22) прикріплено точкову масу M . Пружини жорсткістю C горизонтальні і прикріплені до середини стрижня. Визначити частоту власних коливань механічної системи.

Розв'язання

Вертикальне положення стрижня – це стійке положення рівноваги системи. У цьому положенні повна потенціальна енергія набуває мінімального значення. Мале початкове збурення викликає стійкий рух системи щодо положення рівноваги.

Очевидно, що система має один степінь вільності. Прийmemo за узагальнену координату кут відхилення φ стрижня від вертикалі. Отримаємо рівняння збуреного руху системи за допомогою різних способів. Вважаємо кути відхилення малими.

На рис. 23 показано систему у відхиленому положенні і сили, що діють на стрижень: пружна сила з боку пружин і сила тяжіння.

Перший спосіб. Найбільш загальний прийом вирішення – використання рівняння Лагранжа II роду.

Для узагальненої координати φ справедливо рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q,$$

де T – кінетична енергія системи;

Q – узагальнена сила, яка пов'язана з дією сил тяжіння і пружності.

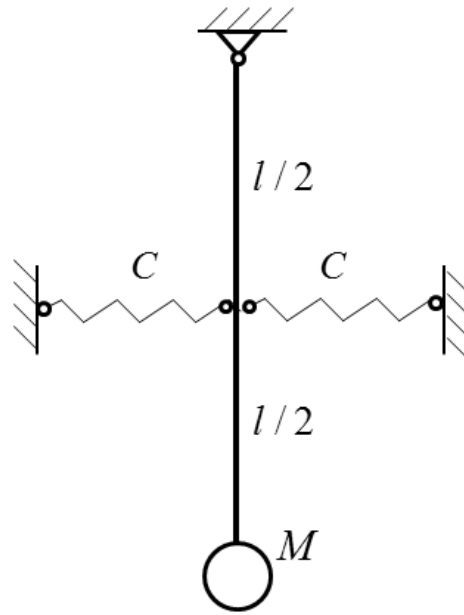


Рис. 22. Механічна система в положенні рівноваги

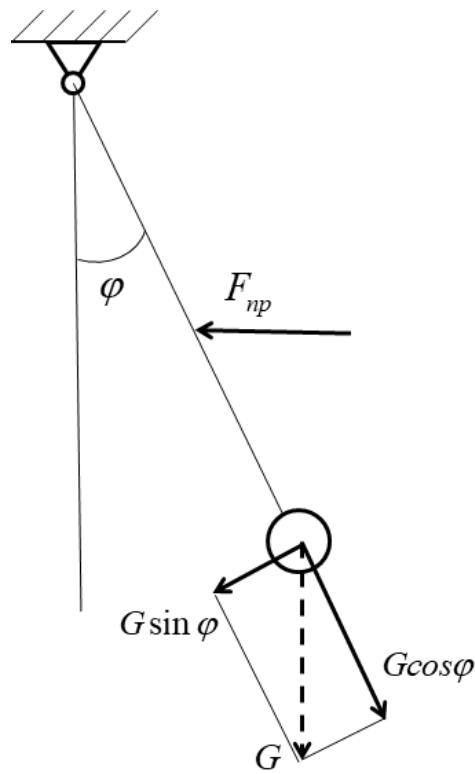


Рис. 23. Сили, що діють на систему

Для довільного положення системи кінетична енергія

$$T = \frac{Ml^2 \dot{\varphi}^2}{2}.$$

Сили тяжіння і внутрішні сили пружності – потенціальні, тому потенціальна енергія системи складається з двох частин – потенціальної енергії деформації двох пружин

$$U_1 = \frac{C\varphi^2 l^2}{4}$$

і потенціалу сили тяжіння U_2 , що дорівнює добутку ваги Mg на висоту підйому його центру ваги $l(1 - \cos \varphi)$:

$$U = U_1 + U_2 = \frac{C\varphi^2 l^2}{4} + Mgl(1 - \cos \varphi).$$

Узагальнену силу знаходять як часткову похідну від потенціальної енергії зі знаком мінус

$$Q = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{Cl^2}{2}\varphi + Mgl\sin\varphi.$$

Диференціюючи співвідношення для кінетичної енергії системи

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = Ml^2 \ddot{\varphi}$$

і підставляючи отримані вирази, а також узагальнену силу Q у рівняння Лагранжа, отримаємо нелінійне рівняння руху системи

$$Ml^2 \ddot{\varphi} + \frac{Cl^2}{2}\varphi + Mgl\sin\varphi = 0.$$

При малих кутах $\sin\varphi \approx \varphi$, тому лінійне диференціальне рівняння руху набуде вигляду

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{l} + \frac{1}{2} \frac{C}{M} \right) \varphi = 0. \quad (70)$$

Частота власних коливань системи

$$\omega_{\text{вл}} = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{1}{2} \frac{C}{M}}$$

залежить не тільки від жорсткості пружини і маси, але і від прискорення вільного падіння.

Другий спосіб. Запишемо другий закон Ньютона для обертального руху стрижня із закріпленою масою навколо точки O (рис. 23):

$$I_0 \ddot{\varphi}(t) = \sum M_o(F),$$

де I_0 – масовий момент інерції системи відносно центра обертання;

$\ddot{\varphi}(t)$ – кутове прискорення;

$\sum M_o(F)$ – сума моментів сил, що діють на стрижень

$$\sum M_o(F) = -Mgl \sin \varphi - F_{np} \frac{l}{2},$$

де F_{np} – сила двох пружин, дорівнює з лінійною точністю

$$F_{np} = 2C \frac{l \sin \varphi}{2} \approx Cl\varphi.$$

Підставляючи отримані співвідношення в рівняння обертального руху, прийдемо до того ж рівняння (70).

Третій спосіб. При використанні загального рівняння динаміки та принципу можливих переміщень необхідно спочатку прикласти до системи крім заданих сил сили інерції (рис. 24). У результаті тіла будуть знаходитися в динамічній рівновазі.

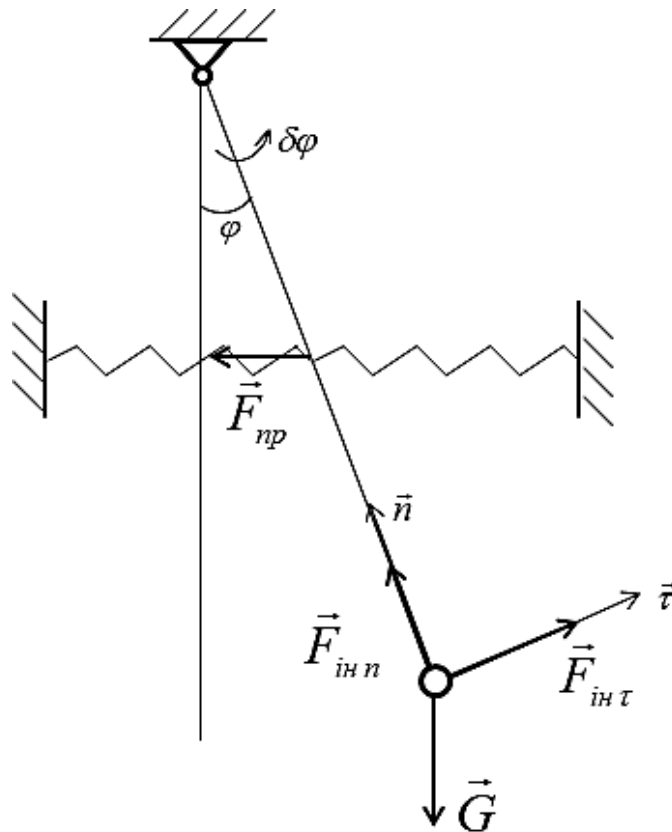


Рис. 24. Застосування принципу Даламбера

На систему (стрижень, дві пружини і маса) діють задані сили і сили інерції. Задані сили – це сила тяжіння G , реакції опор (не показані на рисунку) і сили пружності. Спроектуємо силу інерції маси M в її обертальному русі на дотичну і нормальну до її траєкторії.

На рис. 24 показано позитивний напрямок можливого переміщення – поворот на малий кут $\delta\varphi$. Умова рівноваги системи – рівність нулю суми віртуальних робіт всіх діючих сил, включаючи сили інерції, на можливішому переміщенні $\delta\varphi$:

$$\sum \delta A(F) = 0.$$

Дотичну і нормальну сили інерції запишемо у векторному вигляді:

$$\vec{F}_{\text{ін } \tau} = -M\ddot{\varphi}l\vec{\tau}, \quad \vec{F}_{\text{ін } n} = -M\frac{\dot{\varphi}^2}{l}\vec{n},$$

де $\vec{\tau}$ і \vec{n} – одиничні орти.

Вважаємо, що зв'язки в системі ідеальні, тому їх робота на віртуальному переміщенні $\delta\varphi$ дорівнює нулю. Необхідно визначити роботу заданої сили тяжіння G , внутрішніх сил пружності, що діють у пружині, і сил інерції. Відзначимо, що складова $\vec{F}_{\text{ін } n}$ перпендикулярна до можливого переміщення маси і тому роботи не здійснює.

Таким чином, умова рівноваги системи – це рівність нулю суми віртуальних робіт сили тяжіння

$$\delta A(\vec{G}) = -Mgl \sin \varphi \delta\varphi,$$

сил пружності двох пружин

$$\delta A(\vec{F}_{\text{пр}}) = -\frac{1}{2}Cl^2 \sin \varphi \delta\varphi$$

і тангенціальної складової сили інерції вантажу

$$\delta A(\vec{F}_{\text{ін } \tau}) = -M\ddot{\varphi}l^2 \delta\varphi$$

на можливому переміщенні $\delta\varphi$

$$-M\ddot{\varphi}l^2 \delta\varphi - Mgl \sin \varphi \delta\varphi - \frac{1}{2}Cl^2 \sin \varphi \delta\varphi = 0.$$

Після скорочення виразу на довільний множник $\delta\varphi$ і ділення на Ml^2 отримаємо співвідношення (70).

Четвертий спосіб. На систему (стрижень і маса) діють потенціальні зовнішня сила тяжіння і сила пружності (робота цих сил не залежить від траєкторії руху, а визначається тільки початковим і кінцевим положеннями). Тому скористаємося теоремою про збереження повної механічної енергії системи. Запишемо її для двох положень стрижня з масою: 1 – вертикального; 2 – відхиленого на кут φ . Тоді

$$T_1 + \Pi_1 = T_2 + \Pi_2.$$

У положенні 2 система зупиняється, тому

$$T_2 = 0.$$

Прийmemo, що в положенні 1 повна потенціальна енергія дорівнює нулю (потенціальну енергію визначають з точністю до сталої):

$$\Pi_1 = 0.$$

Отже, кінетична енергія T_1 повністю переходить в потенціальну Π_2 :

$$T_1 = \Pi_2. \quad (71)$$

При гармонічних коливаннях кут відхилення стрижня змінюється за законом

$$\varphi = A \sin(\omega_{\text{вл}} t + \varepsilon).$$

Таким чином, кутова швидкість становить

$$\dot{\varphi} = A\omega \cos(\omega_{\text{вл}} t + \varepsilon),$$

максимальна кінетична енергія системи –

$$T_1 = \frac{I_0 \omega_{\text{вл}}^2}{2} = \frac{I_0 A \omega_{\text{вл}}^2}{2},$$

а максимальна потенціальна –

$$П_2 = Mg(l - l \cos \varphi) + 2 \frac{C \lambda^2}{2},$$

де $\omega_{\text{вл}} = \dot{\varphi}$ – кутова швидкість, а $\lambda = \frac{\varphi l}{2}$ – подовження пружини.

Після підстановки співвідношень для T_1 і $П_2$ у вираз (71) отримаємо рівняння (70).

Висновки

– вільні коливання – гармонічні і відбуваються щодо положення стійкої рівноваги;

– колова частота власних коливань залежить від характеристик жорсткості та масових характеристик системи і не залежить від початкових умов.

Задача 2

Вантаж масою m прикріплений до плоскої рами (рис. 25).

Визначити частоту власних коливань вантажу в горизонтальному напрямку, не враховуючи масу рами. Стрижні мають однакову згинальну жорсткість EI .

Розв'язання

Отримаємо рівняння руху системи і власну її частоту.

Горизонтальні зміщення маси відбуваються тільки внаслідок деформації вигину рами. Визначимо силу пружності, що діє на масу при її зміщенні. Для цього прикладемо одиничну силу до рами в місці закріплення маси. Сила діє в горизонтальному напрямку (рис. 26).

Визначимо реакції опор від дії одиничної сили з умови рівноваги системи:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= H_A - P = 0; \\ \sum M_A(F) &= -R_B l + P l = 0; \\ \sum F_y &= R_A - R_B = 0, \end{aligned}$$

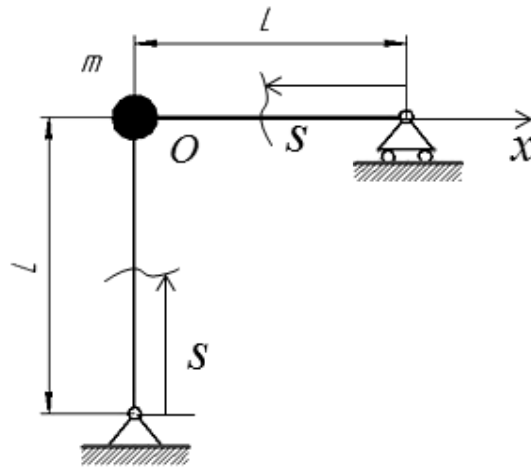


Рис. 25. Вільні коливання плоскої рами з вантажем

звідки

$$H_A = 1; \quad R_B = 1; \quad R_A = 1.$$

Епюри згинальних моментів у рамі показані на рис. 26. Горизонтальне зміщення точки прикладення одиничної сили згідно з інтегралом Максвелла – Мора

$$\delta_{11} = \sum \frac{1}{EI} \int_0^l M^2(s) ds.$$

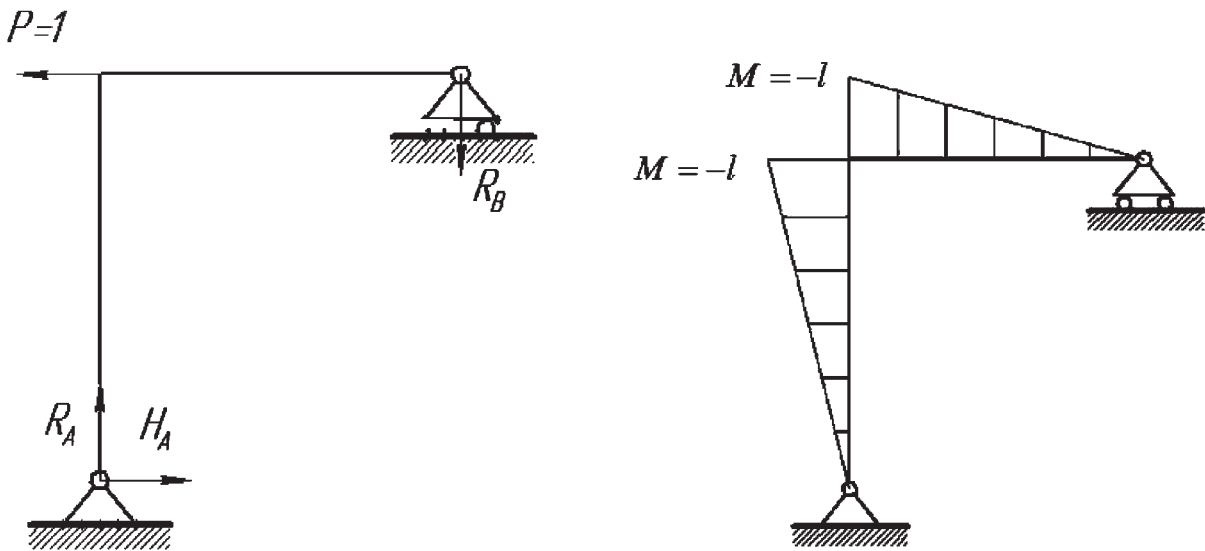


Рис. 26. Одиничний стан рами і епюри згинальних моментів

Вирази згинальних моментів на вертикальному і горизонтальному ділянках рами мають вигляд

$$M_1(s) = -H_A s = -s, \quad M_2(s) = -R_B s = -s.$$

Тоді

$$\delta_{11} = \frac{2}{EI} \int_0^l M_1^2(s) ds = \frac{2}{EI} \frac{l^3}{3}.$$

Визначимо жорсткість C конструкції в напрямку одиничної сили

$$C = \frac{1}{\delta_{11}} = \frac{3EI}{2l^3}.$$

Частота власних коливань конструкції

$$\omega_{вл} = \sqrt{\frac{C}{m}} = \sqrt{\frac{3EI}{2l^3 m}}.$$

Скористаємося теоремою про збереження повної механічної енергії системи в процесі вільних коливань:

$$T + \Pi = const,$$

справедливої за відсутності сил тертя в системі. Врахуємо, що при вільних коливаннях зміщення маси відбувається за гармонічним законом

$$x(t) = A \sin(\omega_{вл} t + \varphi).$$

Тоді швидкість маси виражається у вигляді

$$\dot{x}(t) = A \omega_{вл} \cos(\omega_{вл} t + \varphi).$$

Максимальні значення кінетичної і потенціальної енергій

$$T_{\max} = \frac{m \dot{x}_{\max}^2}{2} = \frac{m A^2 \omega_{вл}^2}{2},$$

$$\Pi_{\max} = \frac{C x_{\max}^2}{2} = \frac{C A^2}{2}.$$

Оскільки

$$\Pi_{\max} = T_{\max},$$

то

$$\frac{m A^2 \omega_{вл}^2}{2} = \frac{C A^2}{2}$$

або

$$\omega_{вл} = \sqrt{\frac{C}{m}}.$$

Висновки. Механічна система з одним ступенем вільності здійснює вільні коливання навколо стійкого положення рівноваги. Коливання відбуваються за законом $x = A \sin(\omega_{вл} t + \varphi)$, де $\omega_{вл}$ - частота власних коливань. Для конструкції власна частота

$$\omega_{вл} = \sqrt{\frac{3EI}{2l^3 m}}$$

залежить від жорсткості балки, маси і розмірів рами. Амплітуду коливань A і початкову фазу φ визначають за допомогою початкових умов.

Задача 3

Сталевий обід кругової форми вагою G і радіусом середньої лінії r прикріплений до нерухокої ступиці радіусом r_0 за допомогою n штук радіальних спиць (рис. 27).

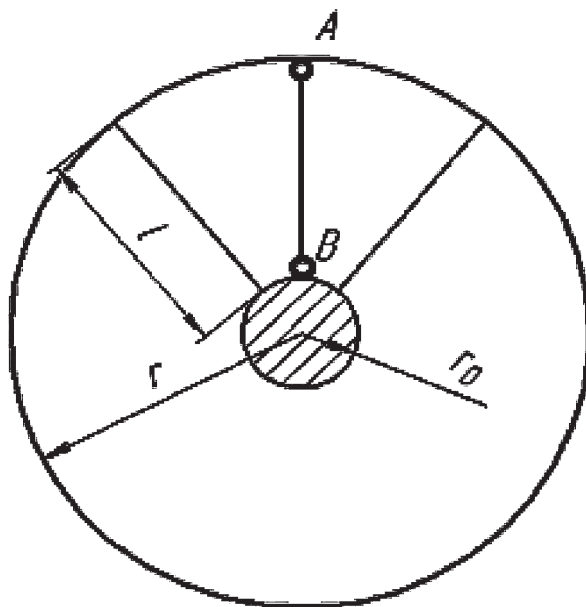


Рис. 27. Рівноважне положення ободу відносно ступиці

Довжина спиці $l = r - r_0$. Кожна спиця має значний попередній натяг силою S_0 . Припускаючи, що сила натягу в процесі коливань не змінюється $S = S_0$, а в точках A і B у всіх спицях розташовані шарніри, визначити період крутильних коливань ободу.

Розв'язання

На рис. 28 показано зміщення обіду на малий кут φ в певний момент часу в процесі вільних коливань.

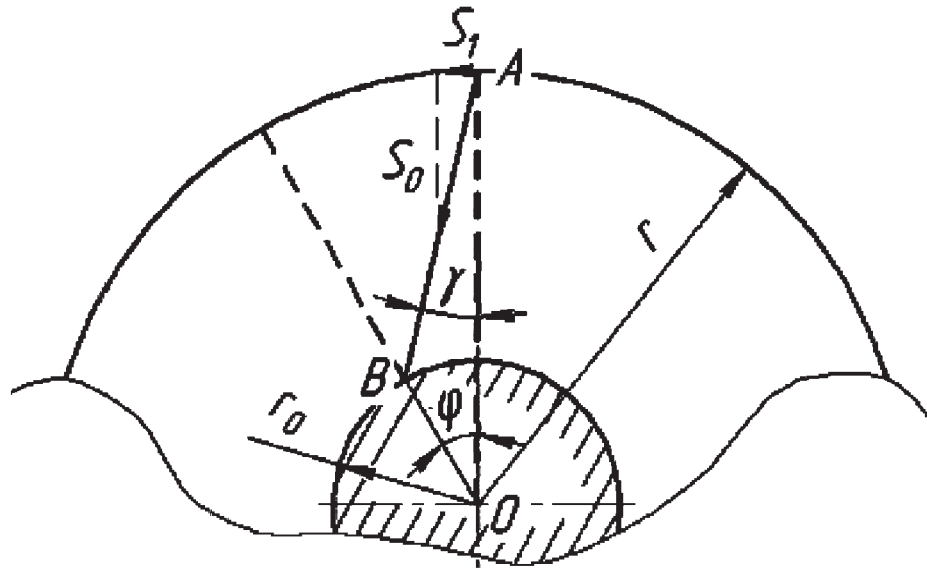


Рис. 28. Вільні коливання ободу

Оскільки сила S_0 не змінюється, то тангенціальна складова цієї сили, яка прагне повернути масивний обід у положення стійкої рівноваги,

$$S_1 = S_0 \sin \gamma.$$

За теоремою синусів для трикутника AOB

$$\frac{AB}{\sin \varphi} = \frac{OB}{\sin \gamma}.$$

Вважаємо кут φ малим, тоді $AB \approx l$, $\sin \varphi \approx \varphi$. Справедливі співвідношення

$$\frac{l}{\varphi} \approx \frac{r_0}{\sin \gamma}, \quad \sin \gamma = \frac{r_0 \varphi}{r - r_0}.$$

Запишемо другий закон Ньютона для крутильних коливань ободу щодо ступиці

$$I_m \ddot{\varphi} = \sum M_O(F),$$

де I_m – масовий момент інерції ободу відносно точки O ;

$\sum M_O(F)$ – пружний момент усіх сил S_1 .

Тоді

$$I_m \ddot{\varphi} = -n S_1 r.$$

Для ободу масовий момент інерції

$$I_m = mR^2 = \frac{gr^2}{g}.$$

Диференціальне рівняння крутильних коливань набуде вигляду

$$\ddot{\varphi} + \frac{nS_1 r}{I_m} = 0.$$

Після підстановки отримаємо рівняння

$$\ddot{\varphi} + \frac{n S_0 r r_0 g}{(r - r_0) Gr^2} \varphi = 0,$$

з якого знаходимо квадрат частоти крутильних коливань обода

$$\omega_{ел}^2 = \frac{n S_0 r_0 g}{(r - r_0) Gr}.$$

Період крутильних коливань обода визначають за формулою

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{ел}} = 2\pi \sqrt{\frac{(r - r_0) Gr}{n S_0 r_0 g}}.$$

Висновок: Чим більше маса обода, тим більшим є період коливань. Збільшення початкового натягу спиць призводить до зниження періоду коливань.

Задача 4

Визначити частоти власних коливань у площинах змаху і гойдання жорсткої лопаті несучого гвинта вертольота типу Мі-8.

Розв'язання

Несучий гвинт (НВ) вертольота (рис. 29) складається з втулки і п'яти лопатей, які кріплять до втулки НГ за допомогою горизонтального шарніра (ГШ) і вертикального шарніра (ВШ).

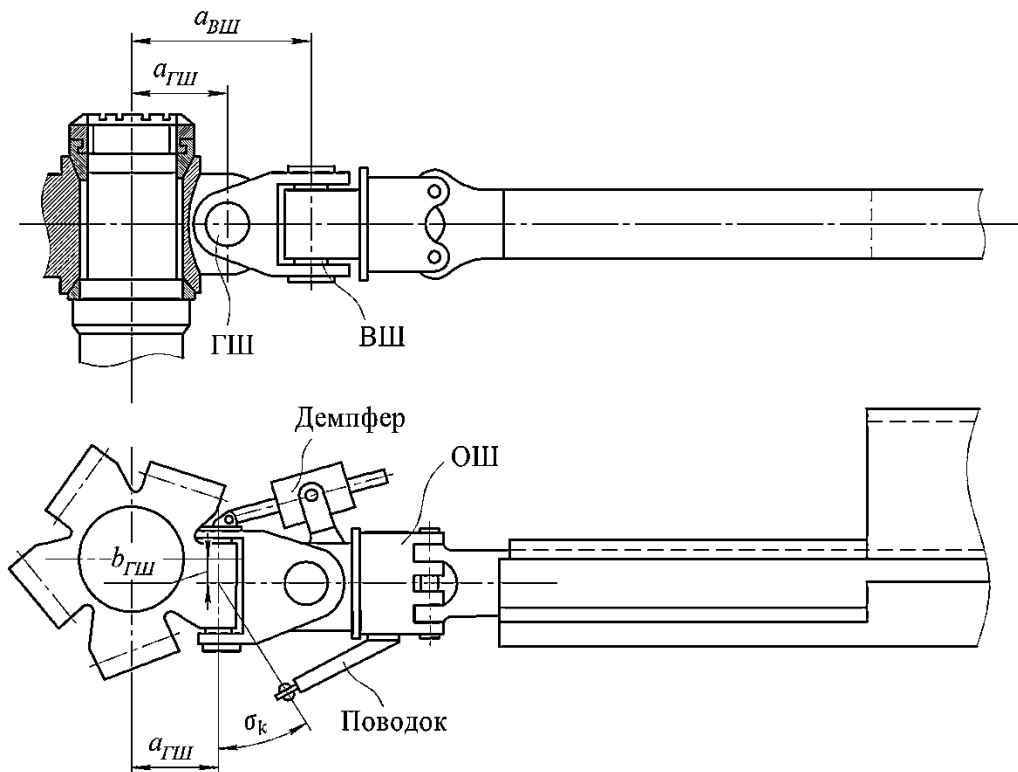


Рис. 29. Схема втулки несучого гвинта вертольота

На рисунку показані рознесення горизонтального $a_{ГШ}$ і вертикального $a_{ВШ}$ шарнірів.

Частота власних коливань лопаті в площині змаху

Несучий гвинт вертольота обертається з кутовою швидкістю ω (рис. 30). Лопать має певну погонну масу $m_{II}(r)$. Визначимо частоту махових коливань лопаті, що обертається, нехтуючи її пружністю.

Рівноважне положення лопаті, що обертається, показано на рис. 30 суцільною лінією.

При змаху відцентрові сили прагнуть повернути лопать у рівноважне горизонтальне положення (рис. 31). Після зовнішнього збурення, що відхилило лопать, відбуваються її вільні махові коливання навколо горизонтального шарніра А.

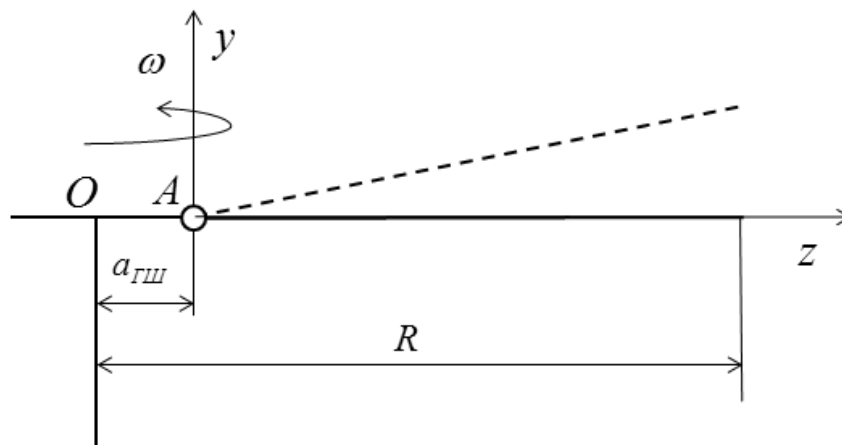


Рис. 30. Рівноважне положення лопаті

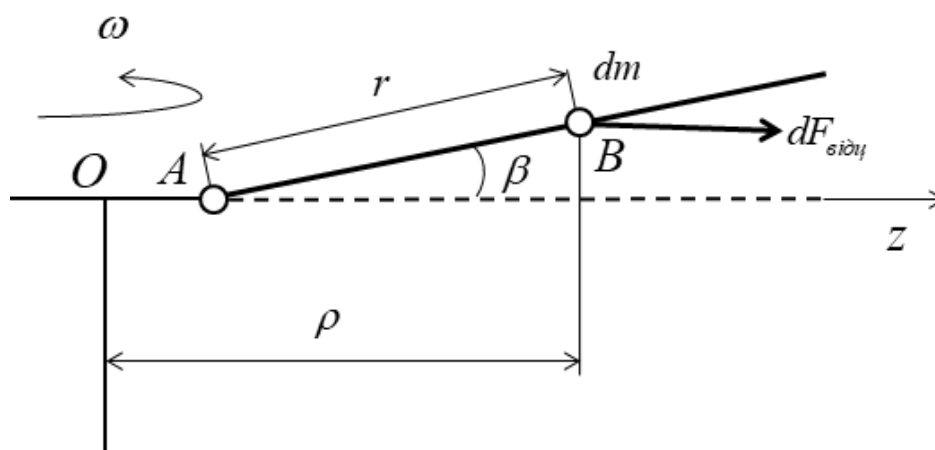


Рис. 31. Махові коливання лопаті

Розглянемо пов'язану з втулкою неінерціальну систему координат, що обертається з кутовою швидкістю НГ (рис. 30).

Лопать як абсолютно тверде тіло має один степінь вільності, що характеризується кутом змаху β , який відраховують від площини обертання гвинта. Кут β – позитивний при змаху вгору.

На елементарну масу dm , розташовану на відстані r від ГШ, при відхиленні від положення рівноваги діє відцентрова сила інерції, спрямована від осі обертання:

$$dF_{цб} = dm\omega^2\rho = m_n dr\omega^2\rho ,$$

де ρ – відстань від осі обертання до елемента маси dm :

$$\rho = a_{ГШ} + r \cos \beta,$$

r – відстань від ГШ до елемента dm .

Рівняння обертального руху лопаті щодо ГШ має вигляд

$$I_{ГШ}\ddot{\beta} = \sum M_A(dF_{цб}) ,$$

де $I_{ГШ}$ – момент інерції лопаті щодо ГШ;

$\ddot{\beta}$ – кутове прискорення від змаху;

$\sum M_A(dF_{цб})$ – сума моментів щодо ГШ елементарних сил інерції.

Очевидно, що в результаті інтегрування по довжині лопаті отримаємо

$$\begin{aligned} I_{ГШ}\ddot{\beta} &= - \int_0^{R-a_{ГШ}} dF_{цб} \sin \beta r = - \int_0^{R-a_{ГШ}} m_n \omega^2 \rho r \sin \beta dr = \\ &= - \int_0^{R-a_{ГШ}} m_n \omega^2 (a_{ГШ} + r \cos \beta) r \sin \beta dr. \end{aligned}$$

При малих кутах відхилення лопаті

$$\sin \beta \approx \beta; \quad \cos \beta \approx 1,$$

тоді

$$\begin{aligned} I_{ГШ}\ddot{\beta} &= - \int_0^{R-a_{ГШ}} m_n \omega^2 (a_{ГШ} + r) r \beta dr = \\ &= \omega^2 \beta a_{ГШ} \int_0^{R-a_{ГШ}} r dm + \omega^2 \beta \int_0^{R-a_{ГШ}} r^2 dm. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\int_0^{R-a_{ГШ}} r dm = S_{ГШ}, \quad \int_0^{R-a_{ГШ}} r^2 dm = I_{ГШ} ,$$

де $S_{ГШ}$ – статичний момент лопаті, а $I_{ГШ}$ – момент інерції щодо ГШ, то

$$I_{ГШ}\ddot{\beta} + \omega^2\beta(I_{ГШ} + S_{ГШ} a_{ГШ}) = 0.$$

Розділивши рівняння на $I_{ГШ}$, отримаємо, що частота власних коливань лопаті в площині змаху становить

$$\omega_{вл1} = \omega \sqrt{1 + \frac{S_{ГШ} a_{ГШ}}{I_{ГШ}}}.$$

Звідси видно, що за наявності розносу ГШ частота власних махових коливань більше, ніж частота обертання гвинта.

При $a_{ГШ} \cong 0$

$$\omega_{вл1} = \omega,$$

тобто махові коливання лопаті відбуваються з частотою обертання гвинта, а період коливань дорівнює часу одного повного обороту НГ:

$$T_{вл} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Відзначимо, що лопать не «відбудована» від резонансу з частотами ω , 2ω і т. ін.

Частота власних коливань лопаті в площині обертання

Рівноважний стан лопаті, що обертається, показаний на рис. 32 пунктирною лінією.

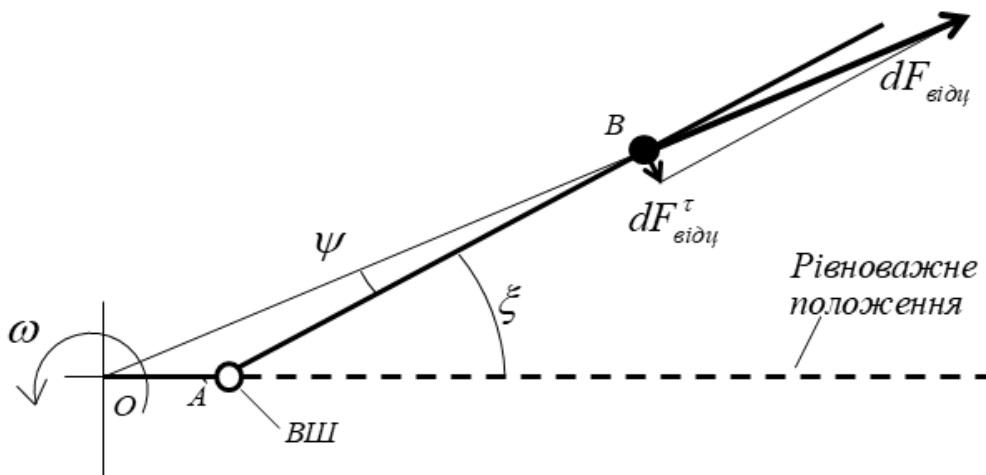


Рис. 32. Гойдальні коливання лопаті

При відхиленні лопаті від рівноважного положення відцентрові сили прагнуть повернути лопать у початковий стан. При цьому виникають вільні гойдальні коливання лопаті навколо вертикального шарніра А.

Зв'яжемо з втулкою неінерціальну систему координат, що обертається з кутовою швидкістю НВ.

Вважаємо, що лопать є абсолютно жорсткою і має один степінь вільності. Кут качання ξ задає положення лопаті щодо ВШ. На рис. 32 зображено відхилене положення лопаті відносно вертикального шарніра. На елементарну масу в процесі обертання гвинта з кутовою швидкістю ω діє відцентрова сила $dF_{\text{відц}}$, спрямована від осі обертання гвинта.

Рівняння обертального руху лопаті щодо ВШ має вигляд

$$I_{\text{ВШ}} \ddot{\xi} = \sum M_{\text{ВШ}}(dF_{\text{ЦБ}}),$$

де $I_{\text{ВШ}}$ – момент інерції лопаті щодо ВШ;

$\ddot{\xi}$ – кутове прискорення;

$\sum M_{\text{А}}(dF_{\text{ЦБ}})$ – сума моментів щодо ВШ елементарних сил інерції.

З трикутника OAB випливає, що при малих ξ

$$OB \approx a_{\text{ВШ}} + r,$$

де $r = AB$. Крім того,

$$\frac{OA}{\sin \psi} = \frac{OB}{\sin(180-\xi)},$$

$$\sin \psi = \frac{OA \sin \xi}{OB} = \frac{a_{\text{ВШ}} \sin \xi}{a_{\text{ВШ}} + r} \approx \frac{a_{\text{ВШ}} \xi}{a_{\text{ВШ}} + r}.$$

Тоді величина відцентрової сили

$$dF_{\text{відц}} = dm \omega^2 OB = m_n \omega^2 (a_{\text{ВШ}} + r) dr,$$

а її момент навколо ВШ

$$\begin{aligned} dM_{\text{відц}} &= -dF_{\text{ЦБ}} \sin \psi r = -dm \omega^2 OB \sin \psi r = -m_n \omega^2 (a_{\text{ВШ}} + r) \sin \psi r = \\ &= -m_n \omega^2 (a_{\text{ВШ}} + r) \frac{a_{\text{ВШ}} \xi}{(a_{\text{ВШ}} + r)} r dr = -m_n \omega^2 a_{\text{ВШ}} \xi r dr. \end{aligned}$$

Рівняння гойдання лопаті набуває вигляду

$$I_{\text{ВШ}} \ddot{\xi} = - \int_0^{R-a_{\text{ВШ}}} m_n \omega^2 a_{\text{ВШ}} \xi r dr = - \omega^2 a_{\text{ВШ}} \xi \int_0^{R-a_{\text{ВШ}}} m_n r dr,$$

де інтеграл

$$\int_0^{R-a_{\text{ВШ}}} m_n r dr = S_{\text{ВШ}} -$$

статичний момент лопаті щодо ВШ. Тоді

$$I_{\text{ВШ}} \ddot{\xi} + \omega^2 a_{\text{ВШ}} \xi S_{\text{ВШ}} = 0$$

або

$$\ddot{\xi} + \frac{\omega^2 a_{\text{ВШ}} S_{\text{ВШ}}}{I_{\text{ВШ}}} \xi = 0.$$

Очевидно, що частота власних коливань лопаті в площині обертання

$$\omega_{вл 2} = \omega \sqrt{\frac{a_{ВШ} S_{ВШ}}{I_{ВШ}}}$$

Колова частота гойдальних коливань лопаті (за статистикою) з урахуванням значень виносу вертикального шарніра $a_{ВШ}$ і статичного моменту $S_{ВШ}$ знаходиться в діапазоні

$$\omega_{вл 2} = (0,25 \dots 0,3)\omega$$

Тому лопать далеко «відбудована» від резонансу з частотами ω , 2ω і т. ін.

Відмітимо, що в процесі запуску двигуна на землі і розкручування несучого гвинта лопаті проходять через резонансу частоту. Короткочасно в лопаті збуджуються підвищені вібрації. Але з урахуванням швидкого проходження частоти $\omega_{вл 2}$ вона не становить загрози.

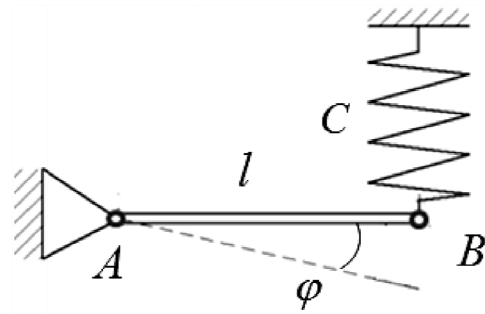
Задачі для домашнього завдання

В таблиці 1 наведені задачі домашнього завдання. Слід записати рівняння руху системи і визначити власну частоту.

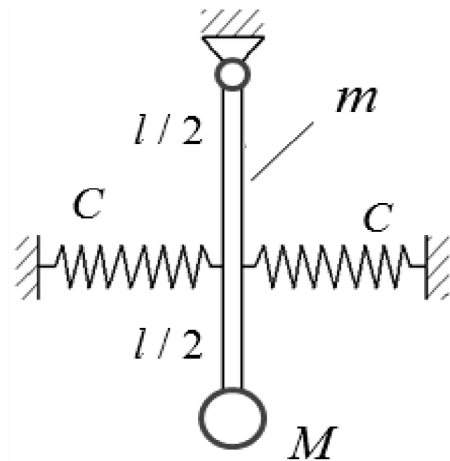
Таблиця 1

<p>1. До сталевого стрижня довжиною $\ell = 1$ м і діаметром $d = 2$ см прикріплений вантаж масою $m = 50$ кг. Знайти частоту і період власних коливань системи без урахування і з урахуванням маси стрижня. Щільність і модуль пружності $\rho = 7,85$ т / м³, $E = 2105$ МПа</p>	
<p>2. Як зміниться частота власних коливань вантажу, якщо від першої схеми кріплень вантажу перейти до другої, розрізавши пружину на дві рівні частини і закріпивши вантаж посередині?</p>	

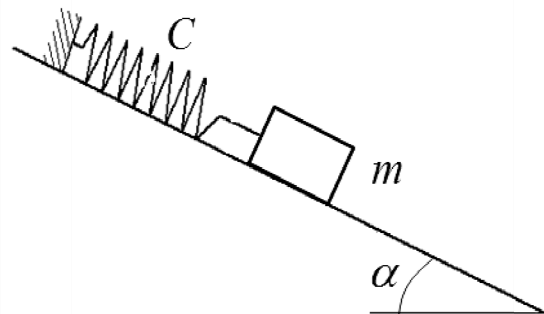
3. Стрижень AB вагою G і довжиною l утримується в горизонтальному положенні шарніром A і пружиною жорсткістю C . Знайти період коливань стрижня. Масу пружини не враховувати, стрижень AB абсолютно жорсткий



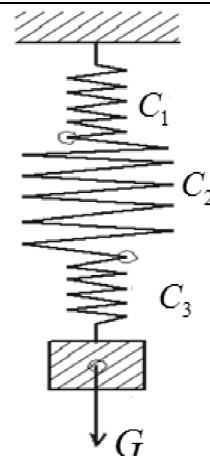
4. На кінці жорсткого стрижня масою m і довжиною l прикріплено точкову масу M . Пружини жорсткості C горизонтальні і прикріплені до середини стрижня. Визначити частоту власних коливань механічної системи

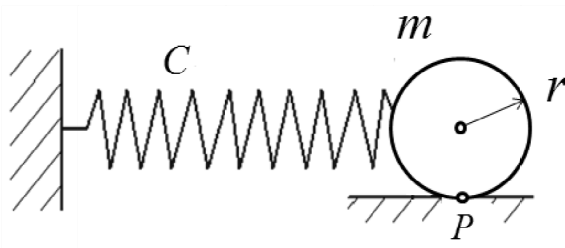
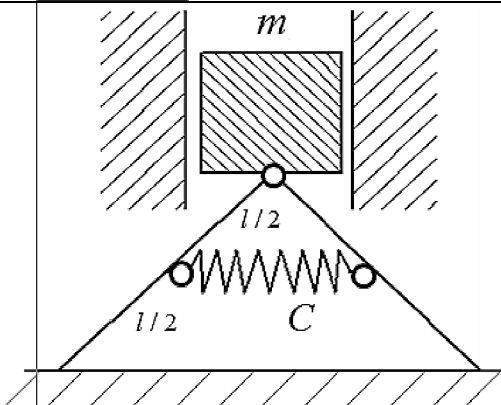
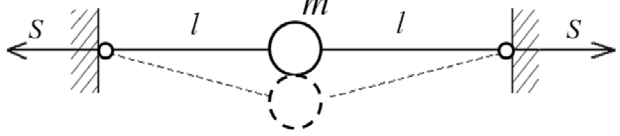
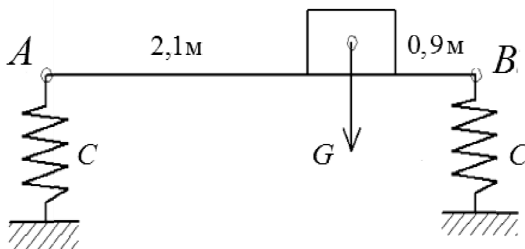
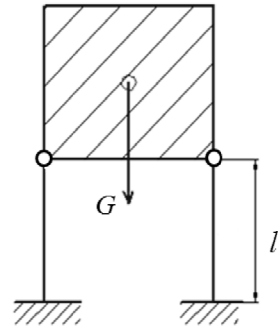


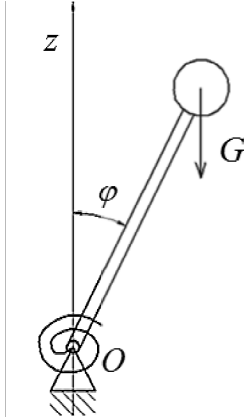
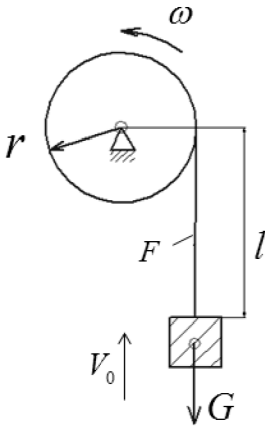
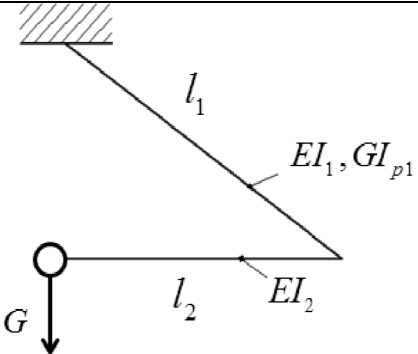
5. Вантаж масою m знаходиться на похилій поверхні і прикріплений до пружини жорсткістю C . Визначити частоту власних коливань системи

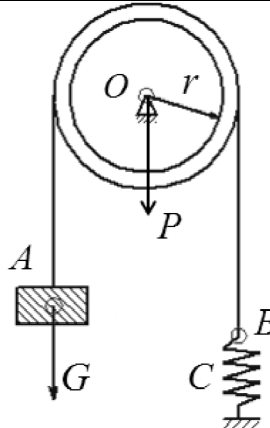
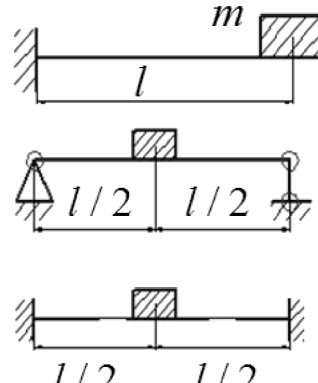
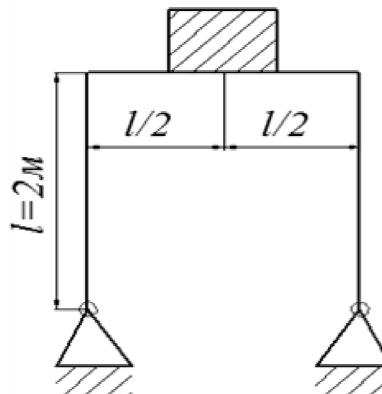
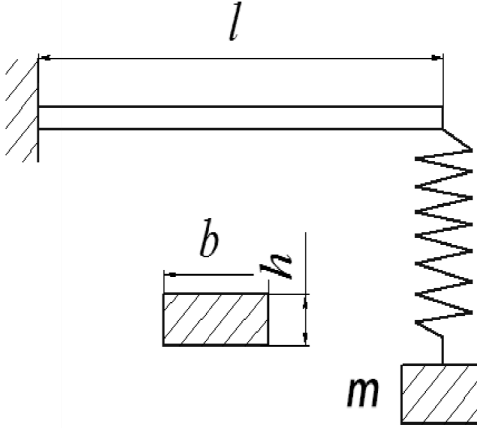


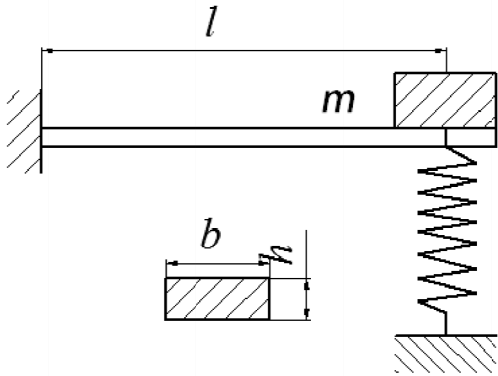
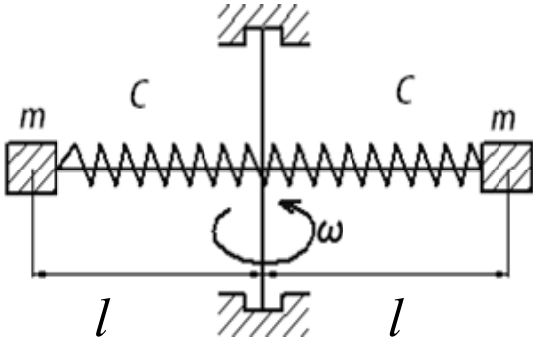
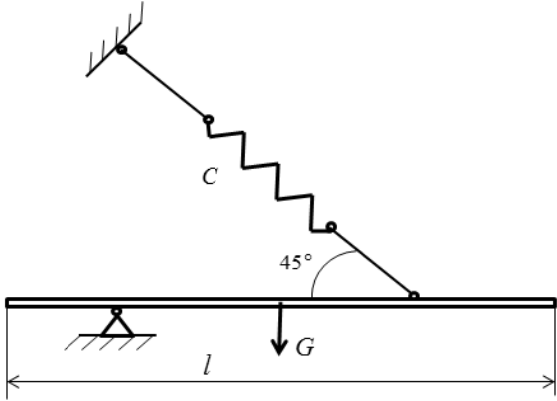
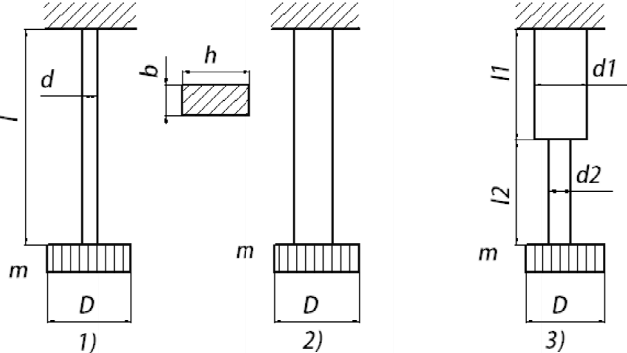
6. Вантаж вагою G підтримується трьома пружинами, з'єднаними послідовно. Знайти жорсткість C еквівалентної пружини і частоту власних коливань

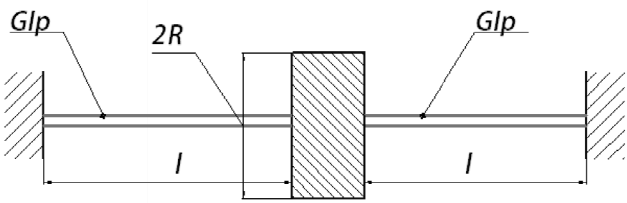
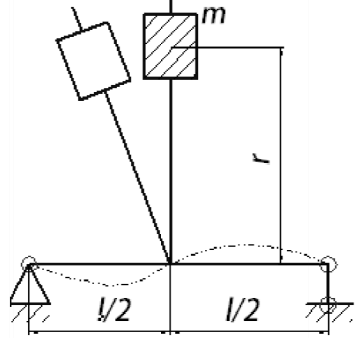
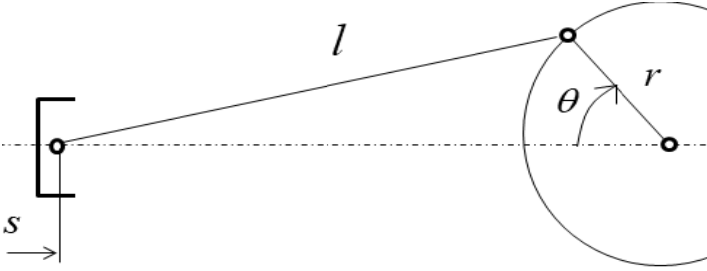


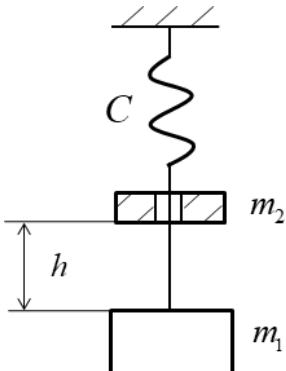
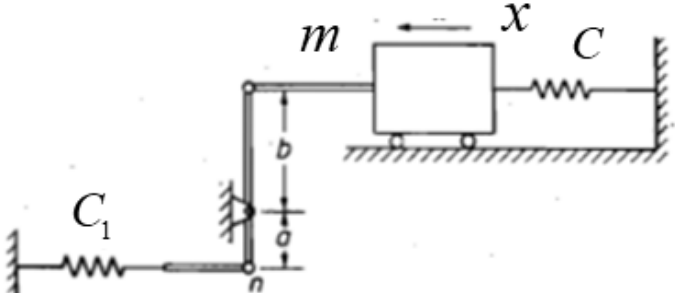
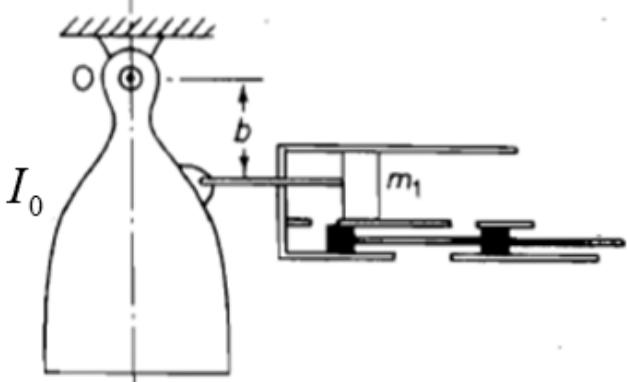
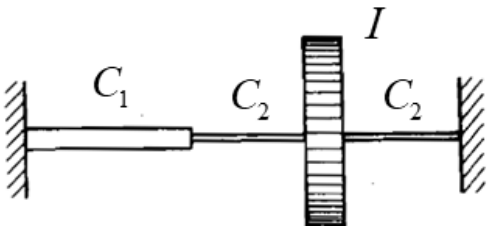
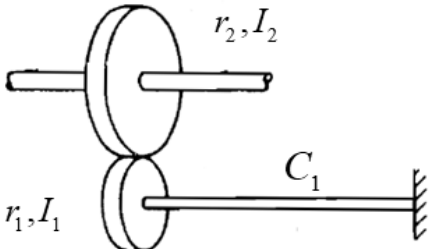
<p>7. Однорідний циліндр масою m і радіусом r прикріплений до горизонтальної пружини жорсткістю C. Визначити частоту власних коливань системи, вважаючи, що просковзування в точці P немає</p>	
<p>8. Маса m рухається поступально у вертикальних напрямках. Стрижні ковзають без тертя по горизонтальній поверхні. Горизонтальна пружина жорсткістю C прикріплена до середини стрижнів. Визначити частоту власних коливань ω системи. Кут нахилу стрижнів – 45° град</p>	
<p>9. Маса m прикріплена до натягнутого троса довжиною $2l$. Вважаючи, що попередній натяг троса S при коливаннях постійний, визначити період малих поперечних коливань маси</p>	
<p>10. Балка AB жорсткістю при вигині $EI = 9 \cdot 10^4 \text{ Нм}^2$ спирається на пружини жорсткістю $C = 5,4 \cdot 10^4 \text{ Н/м}$. Нехтуючи вагою балки, визначити період вільних коливань вантажу вагою $G = 5\,000 \text{ Н}$</p>	
<p>11. Вантаж $G = 6 \cdot 10^5 \text{ Н}$ спирається на чотири вертикальні стояки ($EI = 6 \cdot 10^6 \text{ Нм}^2$), жорстко закріплені знизу. Визначити період вільних коливань вантажу. Вагою стояків знехтувати</p>	

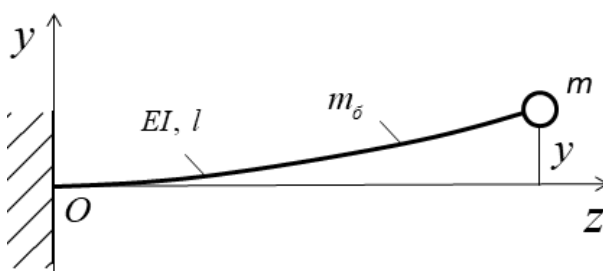
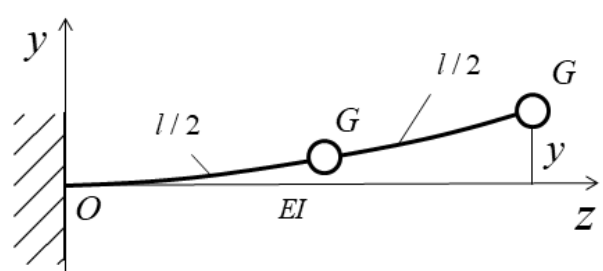
<p>12. Платформа вагою P спирається на абсолютно жорсткі вертикальні стояка 1, 2 і підкріплена сталевим тросом 3 (F – площа троса, E – модуль пружності). Нехтуючи масою елементів 1, 2 і 3, знайти період коливань платформи</p>	 <p>The diagram shows a square platform of side length l resting on two vertical columns, labeled 1 and 2. A diagonal cable, labeled 3, connects the top-left corner to the bottom-right corner. The angle between the cable and the horizontal is α. A downward force P is applied at the center of the platform. The columns are fixed to a rigid base.</p>
<p>13. Визначити можливий стан рівноваги системи зі спіральною пружиною жорсткістю C і частоту власних коливань</p>	 <p>The diagram shows a vertical z-axis. A spiral spring is attached to a fixed point O on the axis. A rod of length l is attached to the other end of the spring, making an angle φ with the vertical axis. A weight G is attached to the end of the rod.</p>
<p>14. Вантаж G піднімається з постійною швидкістю V_0. Визначити максимальне напруження в сталевому тросі довжиною l і площею F при раптовій зупинці підйомника. $G = 4,5 \cdot 10^3$ Н, $l = 20$ м, $F = 1,6 \cdot 10^{-3}$ м², $E = 1,1 \cdot 10^{11}$ Н/м², $V_0 = 1$ м/с. Вагою троса знехтувати</p>	 <p>The diagram shows a pulley of radius r rotating with angular velocity ω. A cable of length l and cross-sectional area F is attached to the pulley and passes over it to a weight G. The weight is moving upwards with velocity V_0.</p>
<p>15. Тверде тіло вагою G прикріплено до ламаного бруса. Згинальні жорсткості ділянок l_1 і l_2 дорівнюють EI_1 і EI_2. Крутильна жорсткість стрижня 2 – GI_p. Визначити частоту вертикальних коливань тіла, вважаючи його за матеріальну точку</p>	 <p>The diagram shows a bent beam fixed at a point. The first segment has length l_1 and flexural rigidity EI_1, GI_{p1}. The second segment has length l_2 and flexural rigidity EI_2. A weight G is attached to the free end of the second segment.</p>

<p>16. Вантаж вагою G підвішений до нерозтяжної нитки AB, перекинута через блок з нерухомою віссю O. Вага блока – P. Його маса рівномірно розподілена по поверхні кола радіусом r. Кінець нитки B прикріплений до пружини жорсткістю C. Визначити частоту власних коливань</p>	
<p>17. Визначити частоту і період коливань вантажу масою $m = 500$ кг, розташованого на балці двотаврового перерізу № 20 а, без урахування і з урахуванням маси балки. Довжина балки $l = 4$ м, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа</p>	
<p>18. Визначити частоту власних вертикальних коливань вантажу масою $m = 250$ кг, закріпленого посередині ригеля. Стрижні рами мають трубчастий перетин 50×40 мм, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Масою рами знехтувати</p>	
<p>19. До пружини, прикріпленої до консолі довжиною $l = 0,5$ м, підвішений вантаж масою $m = 1$ кг. Визначити частоту власних коливань системи, нехтуючи масою пружини і балки. Дано: $b = 5$ см, $h = 1$ см, середній діаметр пружини $D = 10$ см, діаметр дроту $d = 0,5$ см, число витків $n = 10$, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $G = 8 \cdot 10^4$ МПа</p>	

<p>20. Вантаж масою $m = 0,5$ кг закріплений на консолі, кінець якої спирається на пружину. Визначити частоту власних коливань вантажу без урахування маси пружної системи. Дано: $b = 20$ мм, $h = 1,5$ мм, $l = 40$ см. Середній діаметр пружини $D = 20$ мм, діаметр дроту $d = 1$ мм, число витків $n = 8$, $G = 8 \cdot 10^4$ МПа</p>	
<p>21. Система, що складається з двох мас m, пов'язаних між собою пружиною, обертається навколо вертикальної осі. Встановити залежність частоти власних коливань системи від кутової швидкості обертання системи ω. Жорсткість половини пружини – C</p>	
<p>22. Однорідний брус вагою G і довжиною l шарнірно закріплений в точці на відстані чверті його довжини від одного кінця, тоді як на відстані чверті довжини від іншого кінця він утримується пружиною жорсткістю C, утворює з ним кут 45°. Знайти власну частоту коливань: а) у цьому положенні; б) після повороту системи на 90° так, щоб брус звисав по вертикалі вниз</p>	
<p>23. До нижніх кінців сталевих стрижнів прикріплені диски масою $m = 100$ кг і діаметром $D = 20$ см. Визначити частоту і період власних кутових коливань дисків для трьох варіантів стрижнів. Дано: 1) $d = 5$ см, $l = 1$ м; 2) $b = 3$ см, $h = 6$ см, $l = 1$ м; 3) $d_1 = 6$ см, $d_2 = 3$ см, $l_1 = 0,6$ м, $l_2 = 0,4$ м, $G = 8 \cdot 10^4$ МПа</p>	

<p>24. Однорідний диск масою m і радіусом R може повертатися. Крутильні жорсткості для безмасових валів довжиною l дорівнюють Glp. Визначити частоту крутильних коливань</p>	
<p>25. На якій відстані r потрібно закріпити масу m, щоб частоти власних вертикальних і горизонтальних коливань маси збіглися? Перерізи горизонтального і вертикального стрижнів однакові. Масою стрижнів знехтувати</p>	
<p>26. Знайти період власних коливань крутіння сталевого вала діаметром $d = 12$ см і довжиною $l = 1,5$ м, один кінець якого затиснений, а на другий – насаджений на шків із моментом інерції $I_0 = 800$ Нмс²</p>	
<p>27. Сталева циліндрична пружина, що має $n = 12$ витків при середньому діаметрі витка $D = 8$ см і діаметрі дроту $d = 6$ мм, розтягнута вантажем $P = 120$ Н. Визначити частоту власних коливань вантажу</p>	
<p>28. Двотаврова балка № 27 довжиною $l = 6$ м, шарнірно оперта по кінцях, несе посередині прольоту вантаж $P = 30$ кН. Момент інерції двотавра $J = 5010$ см⁴, вага одного погонного метра $q = 315$ Н / м. Визначити частоту власних коливань без урахування маси балки</p>	
<p>29. Визначити частоту власних коливань для двотаврової балки № 27 з моментом інерції $J = 5010$ см⁴, якщо вантаж $P = 30$ кН прикладений на відстані $a = 1,5$ м від лівої опори. Довжина балки $l = 6$ м. Власною вагою балки знехтувати</p>	
<p>30. Знайти функцію для зміщення $s(t)$ у кривошипно-шатунному механізмі. При $r/l = 1/3$ знайти гармонічні компоненти ряду Фур'є.</p>	

<p>31. Маса m_1 закріплена до пружини жорсткістю C і знаходиться у спокої. Маса m_2 падає з висоти h і далі рухається без відскоку разом з m_1. Знайти рівняння руху</p>	
<p>32. Визначити ефективну масу в точці n і частоту власних коливань для системи</p>	
<p>33. Визначити ефективну масу реактивного двигуна, який з'єднаний силовим приводом</p>	
<p>34. Визначити ефективну жорсткість на кручення вала і розрахувати період власних коливань</p>	
<p>35. Визначити ефективний масовий момент інерції вала 1</p>	

<p>36. Для консольної однорідної балки довжиною l методом Релея визначити період поперечних коливань для граничного випадку, коли $m = 0$. Форму балки задати у вигляді</p> $y = y_{\max} \left(1 - \cos \frac{\pi z}{2l}\right),$ <p>де y_{\max} – прогин на вільному кінці</p>	
<p>37. На консольній балці встановлено два вантажі G. Визначити методом Релея період вільних коливань.</p> <p>Дано: $l = 2,44$ м; $G = 4,54 \cdot 10^3$ Н; $EI = 13,2 \cdot 10^5$ Нм².</p>	

Завдання № 2

Вимушені коливання ЛА на пробігу

Життєвий цикл ЛА містить повітряні і наземні режими експлуатації. На цих режимах літак зазнає різноманітних нестационарних навантажень, у конструкції збуджуються вимушені коливання, іноді небезпечні. Вимушені коливання ЛА відбуваються від дії поривів вітру, незбалансованих мас двигуна та інших агрегатів, що обертаються, пульсацій тиску на несучих поверхнях літака від нестационарних вихорів при їх обтіканні, при маневруванні. В процесі розбігу і пробігу літака та при посадці значні нестационарні сили діють на опорні елементи шасі, вони передаються на планер і збуджують інтенсивні коливання окремих його частин і всього ЛА.

Дослідження динамічної реакції літака на нестационарне збудження показує, що ЛА піддається дії навантажень, які вносять істотну частку в пошкодження шасі, фюзеляжу і крила (в основному верхніх панелей). Так, за оцінкою спеціалістів, на літаку С-130 накопичується до 30 % пошкоджень від дії циклів навантажень, пов'язаних з наземними режимами і посадкою ЛА. За весь період експлуатації магістральний типовий літак проїжджає по покриттях аеродромів 100 ... 150 тис. км.

У процесі вивчення вимушених коливань літака визначаються частоти й форми власних коливань конструкції, частотний спектр зовнішніх впливів та їх повторюваність і рівень навантаження силових елементів – тобто відклик конструкції на зовнішнє збурення. Експериментальними або розрахунковими методами визначають амплітудно-частотні і фазово-частотні характеристики вимушених коливань, демпфірування в конструкції, прискорення та перевантаження елементів конструкції. За наявності резонансу постає проблема частотного відстроювання конструкції і зменшення рівня вібрацій.

При русі літака по нерівному аеродрому опорні елементи шасі, амортизаційна система і конструктивні елементи стояків, а також планер ЛА зазнають дію змінних навантажень, які для деяких літаків є визначальними. Нерівності аеродрому викликають коливання ЛА як твердого тіла і збуджують у ньому вібрації. Це призводить до появи змінних напружень у силових елементах і підвищеної витрати ресурсу літака. Досвід експлуатації літаків на аеродромах, що мають нерівне покриття, показує, що навантаження при розбігу і пробігу можуть бути навіть більшими, ніж навантаження шасі від ударів при посадці. Їх причиною є не тільки нерівність аеродрому, але і дії льотчика в процесі керування літаком, пориви вітру, робота силової установки і т. ін.

З аналізу нерівностей злітно-посадкових смуг слідує, що вони мають випадковий характер. Кожен аеродром має свою дисперсію нерівностей, так що розрахунок пошкоджуваності проводять виходячи з відповідних умов експлуатації.

На рис. 33 показано експлуатаційне перевантаження в центрі мас середньомагістрального літака на розбігу. Зміна перевантажень відбувається, як видно, навколо одиниці і пов'язана з дією нестационарних поверхневих сил у зоні контакту колеса з поверхнею аеродрому. Величина цих сил, у свою чергу, залежить від динаміки руху ЛА і його коливань. Очевидно, що у міру зростання швидкості літака змінюється частота зовнішнього впливу. На певних швидкостях руху перевантаження ЛА сягає значних величин і має коливальний характер за часом. Конструкція відкликається на зовнішні впливи, частоти яких близькі до частоти її власних коливань. Зовнішні сили, діючи в такт із власними коливаннями, здійснюють додатну роботу, яка посилює вібрації конструкції.

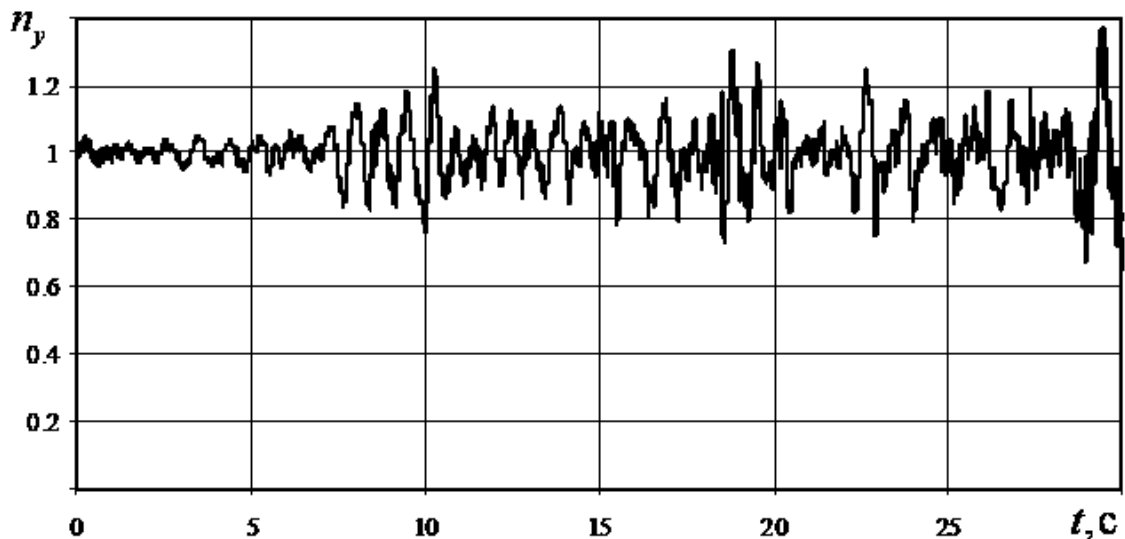


Рис. 33. Перевантаження в центрі мас літака на розбігу

Характерні частоти зміни навантажень, що діють на літак при наземних режимах руху (руління, розбіг, посадковий удар, пробіг), лежать в межах 1...10 Гц [4, 5]. Якщо діапазон частот недалекий від частоти власних коливань літаків, то можливий резонуючий (динамічний) відклик їх основної силової конструкції на навантаження. Тоді наземні режими навантаження істотно впливають на міцність літаків і на порядок їх експлуатації. Для машин зі злітною вагою в межах 20 т частота власних коливань близька до 20...30 Гц. З появою великорозмірних магістральних транспортних літаків з вагою 40 тонн і більше діапазон власних частот становить 1...5 Гц.

Для оцінки темпу витрати ресурсу конструкції при русі по землі треба знати повторюваність навантажень. Її визначають двома способами [1, 5].

Перший – безпосереднє інтегрування рівнянь руху системи за часом з урахуванням реальних характеристик нелінійного шасі. Нерівності аеродрому моделюють датчиком випадкових чисел із відповідною спектральною щільністю. Після отримання ряду реалізації здійснюють статистичну обробку динамічної реакції літака і визначають повторюваність навантажень.

Інший спосіб полягає в лінеаризації всіх нелінійностей і вирішенні завдання в частотній області. Весь зліт або посадку поділяють на декілька ділянок, на кожній з яких швидкість літака вважають постійною, їй відповідає своя піднімальна сила і своє середнє обтиснення шасі. Щодо цього положення проводять ту чи іншу лінеаризацію характеристик: гармонічну, статистичну та ін. Після підсумовування повторюваності навантажень на кожній ділянці далі оцінюють опір утомленості конструкції.

Особливо актуальним є дослідження наземних режимів експлуатації важких транспортних ЛА. Коливання пружної конструкції літаків і сили інерції, що виникають, суттєво впливають на роботу амортизації шасі і на навантаження конструкції.

Часто дослідження наземних режимів базується на фізичному експерименті. Це трудомісткий, дорогий і тривалий процес. Все частіше застосовують математичне моделювання навантаження конструкції і числовий експеримент на ЕОМ для вирішення подібних складних динамічних задач. Такий підхід дозволяє оперативно отримати достовірну інформацію щодо навантаження літака, а також проводити широкі параметричні дослідження динаміки руху. При формуванні моделі функціонування літака на наземних режимах необхідно спиратися на аеродинамічні моделі, рівняння динаміки руху і коливань пружного ЛА і нелінійні співвідношення, які описують роботу амортизаційної системи з урахуванням нерівностей аеродрому.

У завданні розглядається спрощена розрахункова схема динаміки і навантаження ЛА на пробігу. Використовують детермінований підхід – літак після посадки рухається з певною швидкістю по рівному аеродрому і в момент $t = 0$ зустрічає заданий профіль нерівностей. Внаслідок кінематичного силового збудження виникає збурений рух літака, у конструкції ЛА виникають вимушені коливання. Динамічна реакція літака визначається шляхом проведення числових розрахунків на ЕОМ на основі сформованої ММ динаміки літака.

Мета завдання – записати рівняння збуреного руху літака та вимушених коливань конструкції на пробігу при наїзді на нерівності, проаналізувати кінематику та динаміку руху літака, а також визначити навантаження шасі.

Для цього необхідно:

- визначити масові і жорсткісні характеристики ЛА як системи з одним ступенем вільності;
- оцінити величину демпфірування конструкції;
- записати рівняння вимушених коливань ЛА на пробігу при наїзді на нерівність;
- одержати точні аналітичні рішення диференціальних рівнянь руху ЛА і порівняти їх з результатами числового моделювання на ЕОМ;

– визначити амплітудно-частотні та фазово-частотні характеристики коливальної системи і проаналізувати вплив на них конструктивних і експлуатаційних чинників;

– визначити перевантаження в центрі мас літака і сили реакції від полоси на пробігу.

Теоретичні положення і методичні вказівки до виконання домашнього завдання

Припущення і гіпотези

З метою спрощення розрахунків і аналізу системи далі прийнято такі припущення і гіпотези:

– вимушені коливання відбуваються внаслідок кінематичного збудження конструкції;

– амортизатори шасі на пробігу не обтискуються, деформуються лише пневматики коліс основних стояків;

– деформацією планера і силових елементів стояків шасі нехтуємо;

– твердий ЛА і пружні пневматики шасі утворюють коливальну систему, що має один степінь вільності – вертикальне переміщення центру мас літака;

– ЛА після удару на пробігу збалансований за моментами і рухається на основних стояках шасі – перевалювання ЛА на передні колеса не розглядається;

– нерівність полоси має заданий профіль, розглядається детермінований підхід при аналізі коливань.

Вимушені коливання системи з одним степенем вільності

Літак може зазнавати силового або кінематичного збудження. Прикладом найпростішого випадку силового навантаження є дія гармонічної зовнішньої сили. Найчастіше на конструкцію діє довільне у часі збудження, яке може бути зведено до дії ряду гармонічних впливів. При кінематичному збудженні конструкції окремі її точки зазнають певних змінних переміщень. У цьому випадку задача визначення вимушених коливань може бути зведена до силового впливу.

Щодо вимушених сил, які мають довільний закон зміни, можна застосувати теорему Фур'є – довільна періодична функція може бути наведена як сума гармонічних.

Довільне збурення, що діє в процесі експлуатації на конструкцію, може бути розкладено в ряд

$$F(t) = F^{(0)} + \sum_i F^{(ic)} \cos i\omega t + \sum_i F^{(is)} \sin i\omega t, \quad (72)$$

де $F^{(0)}$ – постійна складова навантаження;

$F^{(ic)}$ і $F^{(is)}$ – амплітуди i -ї гармоніки навантаження.

Згідно з принципом суперпозиції дія сили $F(t)$ може бути замінена вирішенням ряду окремих задач – дослідженням реакції системи на кожну з гармонік.

Вимушені коливання ЛА на пробігу визначимо для спрощеної розрахункової системи, яка має лише один степінь вільності. Розглянемо гармонічний осцилятор, до якого може бути зведена система з одним степенем вільності (рис. 34). Він характеризується масою m і жорсткістю пружини C . У системі діють сили тертя. Обмежимося силами в'язкого тертя.

Вимушені коливання відбуваються під дією сил пружності, сил в'язкого тертя, пропорційних швидкості руху, і вимушених сил. Як закон для вимушеної сили візьмемо гармонічний закон

$$F_e(t) = F_o \sin(\omega_e t), \quad (73)$$

де F_o і ω_e – амплітуда і колова частота вимушеної (збуджуючої) сили.

При гармонічному збудженні в конструкції з часом відбуваються постійні вібрації з частотою зовнішнього впливу. На перехідному режимі існують коливання з двома частотами – власною і з частотою вимушеної сили.

Силу в'язкого тертя приймають пропорційною швидкості руху. Вона спрямована протилежно швидкості, а її проекція на вісь x

$$F_{тер}(\dot{x}) = -\alpha \dot{x},$$

де α – коефіцієнт пропорційності. Сила пружності пропорційна зміщенню маси від положення рівноваги і спрямована протилежно координаті x

$$F_{np}(x) = -Cx.$$

Неоднорідне диференціальне рівняння вимушених коливань маси в проекції на вісь x має вигляд

$$m \ddot{x} = F_e(t) - F_{np}(x) - F_{mp}(\dot{x}). \quad (74)$$

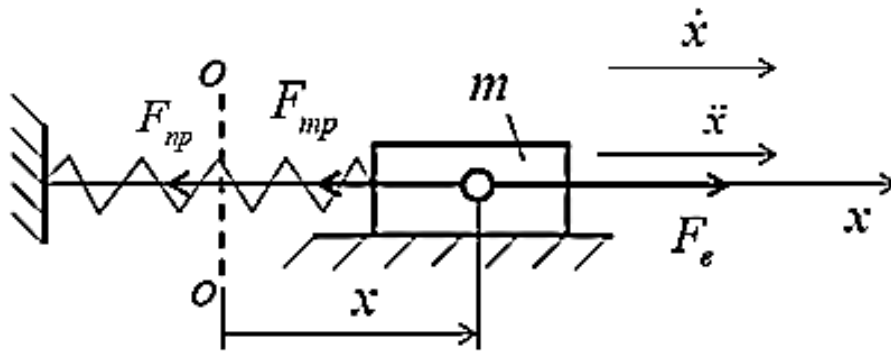


Рис. 34. Сили, що діють при вимушених коливаннях системи

Поділивши на m , одержимо

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_{вл}^2 x = \frac{F_0}{m} \sin(\omega_{вл} t), \quad (75)$$

де $n = \frac{\alpha}{2m}$ – коефіцієнт тертя;

$\omega_{вл} = \sqrt{C/m}$ – частота власних коливань.

Відзначимо, що за рівнянням (75) відбувається і рух конструкції ЛА, якщо за можливі степені вільності системи вибрані форми її власних коливань [2, 6].

Загальне рішення рівняння (75) складається з рішення однорідного рівняння, яке визначає вільні коливання системи, і часткового рішення, яке визначає вимушені коливання. На перехідному етапі виникають коливання з частотами ω_{ϵ} і $\omega_{вл}$, тобто з частотами вимушеної сили і вільних коливань. Результуючий рух у початковий період не буде гармонічним. У реальних системах власні коливання швидко загасають і після деякого перехідного періоду система буде здійснювати вимушені коливання з частотою збуджуючої сили.

Характер коливань у перехідний період залежить від співвідношення ω_{ϵ} і $\omega_{вл}$ (рис. 35). Відмітимо, що при $\omega_{\epsilon} \approx \omega_{вл}$ у коливаннях мають місце так звані биття. Період биття залежить від відносної кутової швидкості $(\omega_{\epsilon} - \omega_{вл})$ і визначається так:

$$T_{\epsilon} = \frac{4\pi}{\omega_{\epsilon} - \omega_{вл}}.$$

Як видно, з часом вільні коливання загасають і биття зникає. При дії двох вимушених сил із близькими частотами (рис. 35, г) биття має сталий характер. При резонансі (рис. 35, д) на перехідному режимі амплітуда коливань зростає майже за лінійним законом, а зрештою встановлюється певна стала амплітуда вимушених коливань.

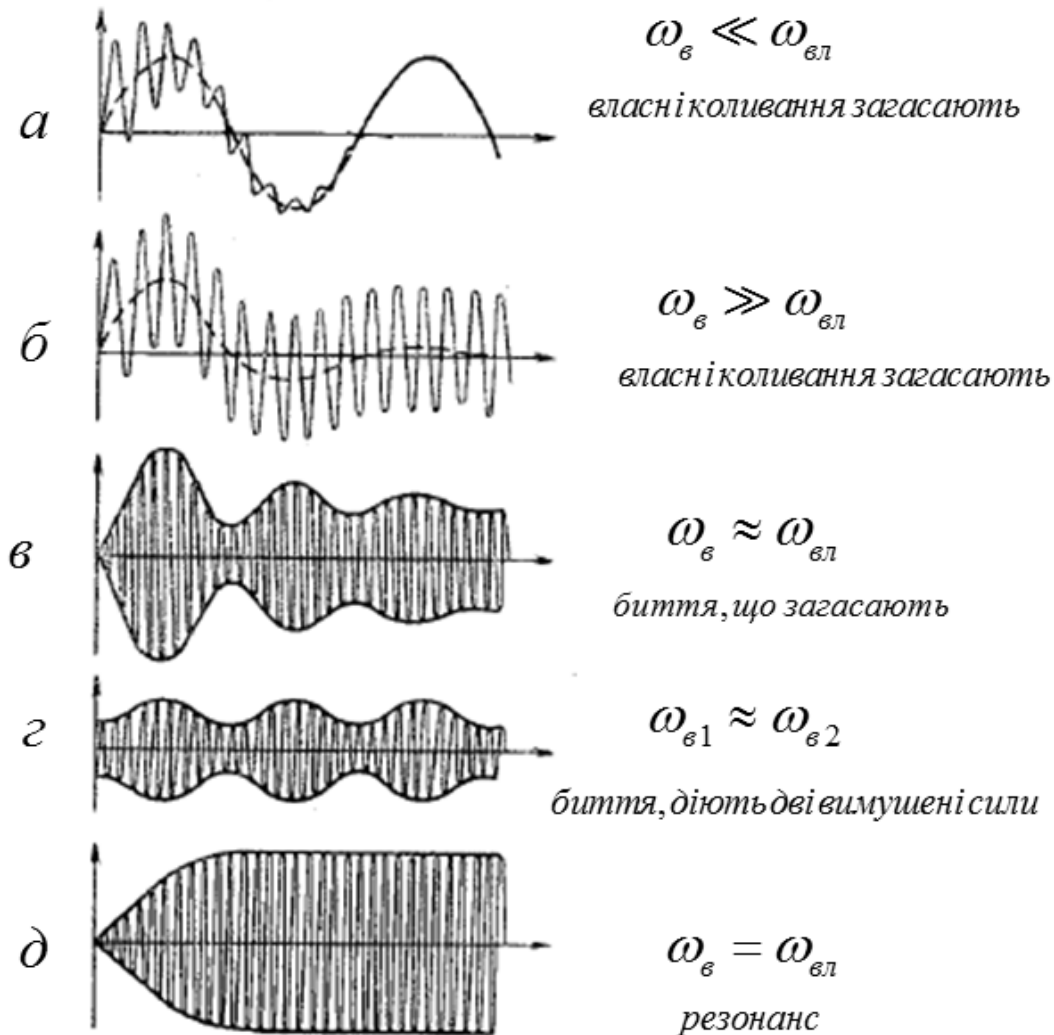


Рис. 35. Процес встановлення вимушених коливань

Встановимо важливі фізичні закономірності *сталих вимушених коливань*. Характер руху не тільки визначається властивостями системи, але й істотно залежить від зовнішніх сил.

При вимушених коливаннях у систему з боку вимушених сил безперервно підводиться енергія, яка витрачається на подолання наявних у системі опорів. Коли частота вимушених сил збігається з частотою власних коливань, настає резонанс, що супроводжується значним (часто небезпечним) збільшенням амплітуд коливань.

Сталий рух в цьому випадку відбувається у вигляді

$$x = x_0 \sin(\omega_\epsilon t - \varphi), \quad (76)$$

де x_0 і φ – амплітудне відхилення і зсув фази між силою і переміщенням.

Запишемо рівняння вимушених коливань (74) у вигляді чотирьох доданків

$$(-m\ddot{x}) + (-\alpha\dot{x}) + (-Cx) + F_0 \sin(\omega_\epsilon t) = 0. \quad (77)$$

З урахуванням (76)

$$m x_0 \omega_\epsilon^2 \sin(\omega_\epsilon t - \varphi) + \alpha x_0 \omega_\epsilon \sin(\omega_\epsilon t - \varphi - \pi/2) + C x_0 \sin(\omega_\epsilon t - \varphi + \pi) + F_0 \sin(\omega_\epsilon t) = 0. \quad (78)$$

Скористаємося векторною інтерпретацією рівняння (78) (рис. 36).

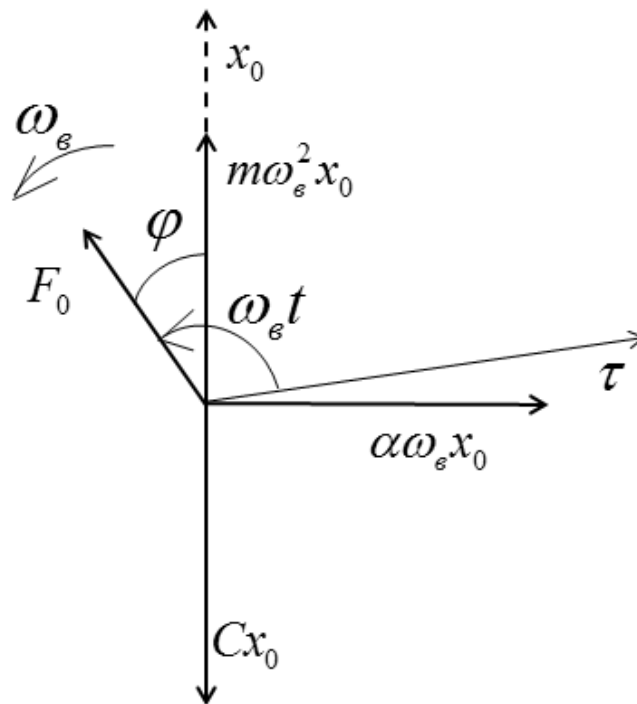


Рис. 36. Векторна діаграма діючих сил

На рисунку зображені вектори чотирьох сил: F_0 , Cx_0 , $m x_0 \omega_\epsilon^2$ і $\alpha x_0 \omega_\epsilon$. Згідно з (78) можна вважати, що вони обертаються з однаковою кутовою швидкістю ω_ϵ . При цьому їх взаємне положення не змінюється. З виразів (77) і (78) випливає, що в будь-який момент часу сума проєкцій чотирьох сил на довільний напрям, перпендикулярний τ , має дорівнювати нулю. Кутове положення вектора сили F_0 задають кутом $\omega_\epsilon t$, який відраховують від довільно заданого вектора τ .

Для вертикального і горизонтального напрямків маємо такі умови рівноваги:

$$\begin{aligned} Cx_0 - m\omega_0^2 x_0 - F_0 \cos \varphi &= 0; \\ \alpha\omega_0 x_0 - F_0 \sin \varphi &= 0. \end{aligned}$$

Із цих рівнянь можна визначити важливі характеристики сталих коливань при періодичному збуренні:
амплітуду

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{F_0}{\sqrt{(\alpha\omega_0)^2 + (C - m\omega_0^2)^2}} = \frac{F_0}{m\sqrt{4n^2\omega_{вл}^2 + (\omega_{вл}^2 - \omega_0^2)^2}} = \\ &= \frac{F_0}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_{вл}^2}\right)^2 - \left(2\frac{\alpha}{\alpha_k} \frac{\omega_0}{\omega_{вл}}\right)^2}}; \end{aligned} \quad (79)$$

і зсув фази між силою і переміщенням

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2n\omega_0}{\omega_{вл}^2 - \omega_0^2} = \frac{\alpha\omega_0}{C - m\omega_0^2} = \frac{2\frac{\alpha}{\alpha_k} \frac{\omega_0}{\omega_{вл}}}{1 - \left(\frac{\omega_0^2}{\omega_{вл}^2}\right)} = \frac{2\zeta \frac{\omega_0}{\omega_{вл}}}{1 - \left(\frac{\omega_0^2}{\omega_{вл}^2}\right)}, \quad (80)$$

де $\omega_{вл}$ – частота власних коливань; α_k – критичне значення коефіцієнта демпфірування

$$\alpha_k = 2m\omega_{вл}.$$

Відмітимо, що величина $\delta_{ст} = \frac{F_0}{C}$ – це переміщення, яке виникає в системі при статичній дії амплітудного значення збуджуючої сили (73).

Коефіцієнтом динамічності називається відношення амплітудного відхилення x_0 до $\delta_{ст}$:

$$\begin{aligned} \beta = \frac{x_0}{\delta_{ст}} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{4n^2\omega_0^2}{\omega_{вл}^4} + \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_{вл}^2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\delta}{\pi}\right)^2 \frac{\omega_0^2}{\omega_{вл}^2} + \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_{вл}^2}\right)^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left[2\zeta \frac{\omega_0}{\omega_{вл}}\right]^2 + \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_{вл}^2}\right)^2}}, \end{aligned} \quad (81)$$

де δ – логарифмічний декремент загасання

$$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \approx 2\pi\zeta.$$

Величини коефіцієнта динамічності і кута зсуву фази при різних значеннях частотного розладу $\frac{\omega_e}{\omega_{вл}}$ і логарифмічного декременту загасання змінюються згідно з рис. 37 і 38.

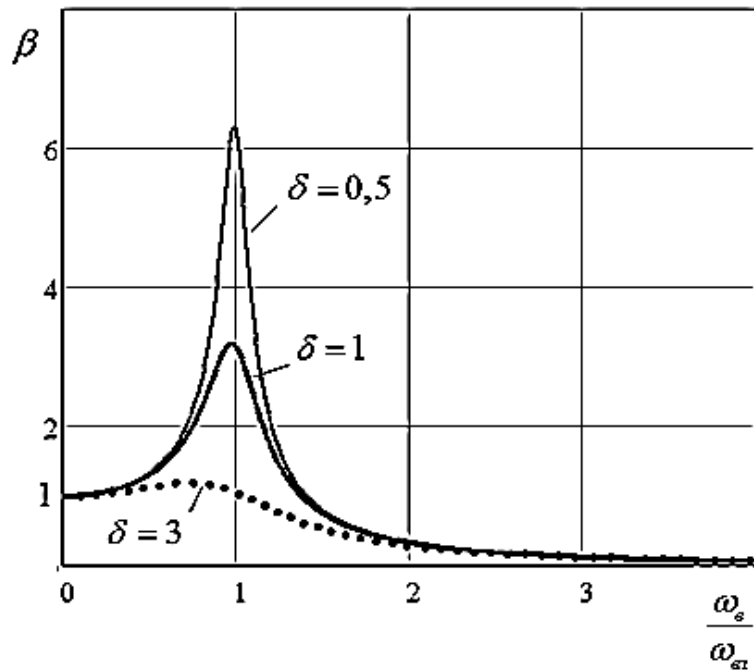


Рис. 37. Зміна коефіцієнта динамічності від $\omega_B/\omega_{вл}$

Графіки залежності коефіцієнта динамічності β і фази φ від частотного розладу $\omega_B/\omega_{вл}$ при фіксованому значенні відносного коефіцієнта демпфірування $n/\omega_{вл}$ називаються амплітудно-частотною характеристикою (АЧХ) і відповідно фазово-частотною характеристикою (ФЧХ).

У дорезонансній області ($0 \leq \omega_B/\omega_{вл} < 0,75$; $0 \leq \varphi \leq 0,5\pi$) коефіцієнт динамічності β незначно відрізняється від одиниці (амплітуда сталих вимушених коливань близька до статичних переміщень від амплітудного значення вимушеної сили).

У резонансній області ($0,75 \leq \omega_B/\omega_{вл} < 1,25$; $\varphi \approx 0,5\pi$) коефіцієнт динамічності β значно відрізняється від одиниці (амплітуда сталих вимушених коливань більше, ніж статичні переміщення).

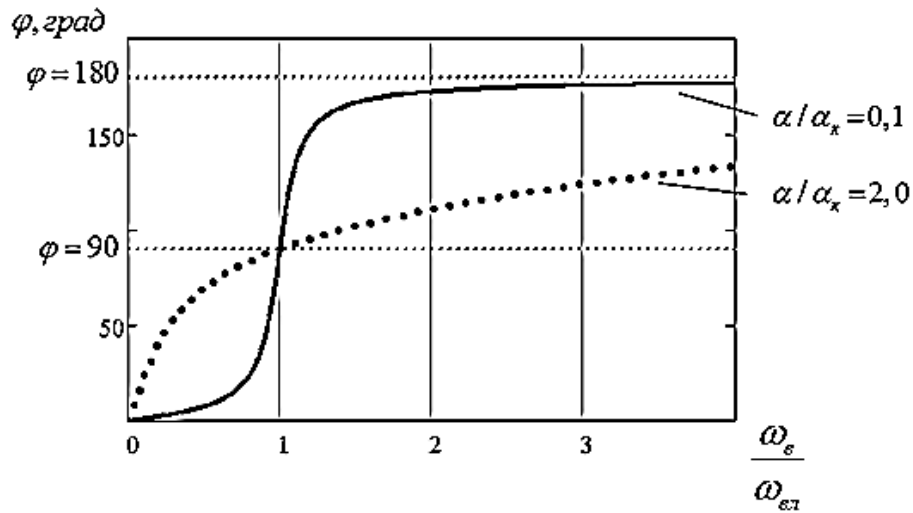


Рис. 38. Зміна кута зсуву фази від $\omega_{\text{в}}/\omega_{\text{вл}}$

У резонансній області ($1,25 \leq \omega_{\text{в}}/\omega_{\text{вл}} < \infty$; $0,5\pi \leq \varphi < \pi$) коефіцієнт динамічності β наближається до нуля, тобто високочастотна сила практично не викликає вимушених коливань.

Вигляд кривих АЧХ і ФЧХ залежить від величини тертя в коливальній системі $n/\omega_{\text{вл}}$. Можливі чотири випадки величини тертя – його немає ($n/\omega_{\text{вл}} = 0$), воно мале, тертя критичне і тертя велике.

У першому випадку зазначені криві мають розрив, у другому – $n/\omega_{\text{вл}} < 1/\sqrt{2} \approx 0,7$ – вони безперервні, а АЧХ має максимум в інтервалі $0 \leq \omega_{\text{в}}/\omega_{\text{вл}} < 1$ (до точного резонансу). Прирівнюючи до нуля похідну від β за $(\omega_{\text{в}}/\omega_{\text{вл}})^2$, отримуємо абсцису і ординату цього максимуму

$$\omega_{\text{в}}/\omega_{\text{вл}} = \sqrt{1 - 2(n^2/\omega_{\text{вл}}^2)}, \quad \beta_{\text{max}} = \omega_{\text{вл}}^2 / 2n\sqrt{\omega_{\text{вл}}^2 - n^2}.$$

Звідси випливає, що максимум розташований в діапазонах

$$0 < \frac{n^2}{\omega_{\text{вл}}^2} \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq \omega_{\text{в}}/\omega_{\text{вл}} \leq 1.$$

Координата максимуму зменшується при зростанні тертя (див. рис. 37). Найменше значення коефіцієнта динамічності дорівнює одиниці при $\omega_{\text{в}}/\omega_{\text{вл}} = 0$.

При малому терті кут зсуву фази між силою і переміщенням близький до нуля, при резонансі він дорівнює $\pi/2$ і прагне до π радіанів при великій частоті вимушених коливань. Характер збільшення кута від $\omega_{\text{в}}/\omega_{\text{вл}}$ значно залежить від тертя в системі.

Третій випадок $n/\omega_{\text{вл}} = 1/\sqrt{2}$ – критичний, бо $\beta_{\text{max}} = 1$ і резонансу немає (відсутнє збільшення амплітуди коливань вище

статичного переміщення). Крива АЧХ – монотонно падаюча, і при $\omega_B / \omega_{ВЛ} = 1$ коефіцієнт динамічності $\beta = 1/\sqrt{2} \approx 0,7$.

У четвертому випадку (велике тертя, $n/\omega_{ВЛ} > 1/\sqrt{2}$), криві АЧХ також монотонно спадають. АЧХ починаються в точці $\omega_B / \omega_c = 0$, $\beta = 1$, яка не є точкою екстремуму, а при $\omega_B / \omega_{ВЛ} = 1$ $\beta \ll 1$.

При дуже малому терті максимальне значення коефіцієнта динамічності β не набагато більше, ніж його значення при точному резонансі $\omega_B / \omega_{ВЛ} = 1$. Останнє легко обчислити, якщо як максимальне значення коефіцієнта прийняти

$$\beta_{max} \approx \frac{\omega_{ВЛ}}{2n} = Q = \frac{\pi}{\delta},$$

де Q – добротність коливальної системи.

При резонансі навіть невелика збурювальна сила викликає значні переміщення (деформації, напруження). Значне збільшення амплітуди коливань відбувається не тільки при точному резонансі ($\omega_B / \omega_{ВЛ} = 1$), але й в деякому околі – резонансній області. Навіть невелике тертя значно обмежує амплітуду резонансних коливань, і тому має бути враховано при розрахунках. За резонансною зоною тертя можна не враховувати. При великому терті $n/\omega_{ВЛ} > 1/\sqrt{2}$ вимушені коливання навіть у резонансній області не будуть резонансними. Тертя збільшує зсув фази коливань. При точному резонансі незалежно від величини тертя зсув фази дорівнює $0,5\pi$.

Повернемося до векторної діаграми на рис 36 і простежимо, як змінюються залежно від частоти ω_e амплітуда і зсув фази.

Для дуже повільних коливань ($\omega_e \approx 0$) загасанням і силою інерції можна знехтувати, тоді $F_0 = C x_0$ і $\varphi = 0$. Отже, діюча сила врівноважується силою пружності.

Із зростанням частоти вектор, що зображує силу загасання, зростає, але зате сила інерції зростає ще швидше. Зсув фази вже не може більше залишатися таким, що дорівнює нулю, оскільки сила F_0 повинна мати горизонтальну складову зліва, щоб урівноважити $\alpha \omega_e x_0$. Вектор сили інерції буде збільшуватися до тих пір, поки він за своєю довжиною не зробиться таким, що дорівнює відновлювальній силі або силі пружності пружини. Тоді $\varphi = \pi / 2$ і $F_0 = \alpha \omega_e x_0$, а це існує при резонансі, оскільки $m\omega_e^2 x_0 = Cx_0$ або $\omega_e^2 = C / m$.

Отже, при резонансі зсув фази дорівнює $\pi/2$ незалежно від загасання. Далі при збільшенні частоти $m\omega_g^2 x_0$ збільшується інтенсивніше, ніж Cx_0 , внаслідок чого F_0 отримує нахил вниз і φ буде більше, ніж $\pi/2$.

Для дуже високих частот Cx_0 є незначним порівняно з $m\omega_g^2 x_0$, так що F_0 врівноважуватиме силу інерції, і тоді $\varphi = \pi$.

При малих швидкостях збурювальна сила долає силу пружності; при великих швидкостях ця збурювальна сила йде на подолання інерції, а при резонансі вона врівноважує силу загасання.

Залучимо енергетичні поняття для кращого з'ясування фізичної сторони явища. Робота, що здійснюється силою за час одного повного коливання, дорівнює

$$A = \int_0^{2\pi} F_B \frac{dx}{dt} dt = \frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} F_B \frac{dx}{dt} d(\omega t) = \pi F_0 x_0 \sin \varphi. \quad (82)$$

Для дуже повільних рухів $\varphi=0$ і за повний період ніяка робота не відбувається. При резонансній частоті $\varphi=\pi/2$ і величина розсіяної енергії за один період дорівнює $\pi F_0 x_0$. У такому випадку збурювальна сила числено дорівнює силі загасання й протилежна їй, а сила пружності дорівнює силі інерції, але протилежна їй за фазою. Отже, вона знаходиться в одній фазі з переміщенням.

Оцінімо резонансну амплітуду. Енергія, що розсіяна за один період внаслідок загасання, дорівнює $\pi\alpha\omega_B x_0^2$, а робота вимушених коливань – $\pi F_0 x_0$, отже,

$$\pi F_0 x_0 = \pi\alpha\omega_B x_0^2. \quad (83)$$

Це співвідношення показано на рис. 39, де по осі абсцис відкладено амплітуди, а по осі ординат – величина роботи за один період, причому одна крива відповідає роботі сили F_0 , а інша – роботі сили загасання.

У точці перетину кривих маємо енергетичну рівновагу, амплітуда x_0 встановлюється сама собою. Справді, якщо в певний момент часу амплітуда буде більшою, то розсіювання енергії буде більшим, ніж її приплив, що тягне за собою поступове зменшення кінетичної енергії системи до тих пір, поки не буде досягнуто амплітуди, відповідної вказаній рівновазі.

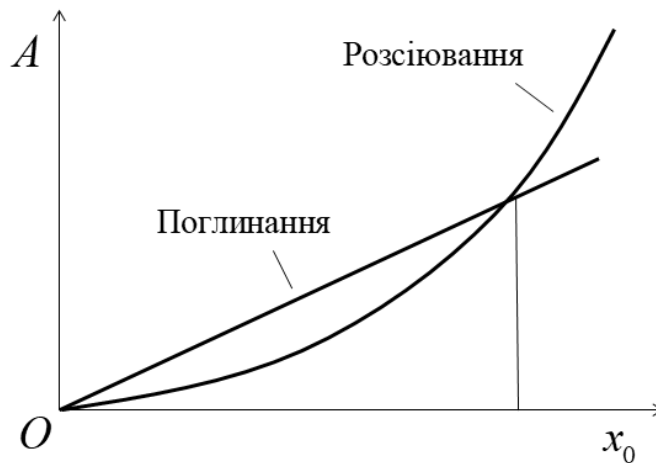


Рис. 39. Робота збудовальної сили і сили демпфірування за один період

Вирішуючи рівняння (83) щодо x_0 , маємо

$$x_{0 \text{ рез}} = \frac{F_0}{C\omega_s} . \quad (84)$$

Якщо система зазнає неперіодичного зовнішнього впливу $F(t)$, то має місце перехідний відклик конструкції. Так званих сталих коливань не виникає. Відбуваються коливання з частотою власних коливань і з амплітудою, яка залежить від характеру збудження.

Розглянемо довільну збудовальну силу $F(t)$, яка прикладена до системи. Рівняння руху маси має вигляд

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_{вл}^2 x = \frac{F(t)}{m} . \quad (85)$$

Воно відрізняється від рівняння вільних коливань наявністю правої частини. Динамічний відклик конструкції можна отримати на основі інтеграла Дюамеля.

Довільне навантаження $F(t)$ можна подати як дію окремих складових. На рис. 40 показано довільну неперіодичну силу, яка може бути наведена як сукупність дії на систему елементарних імпульсів сил

$$dS = F(\xi)d\xi .$$

Для лінійної системи справедливим є принцип суперпозиції. Це означає, що переміщення (як функція часу), викликане довільним навантаженням, дорівнює сумі переміщень, викликаних кожним із складових навантаження.

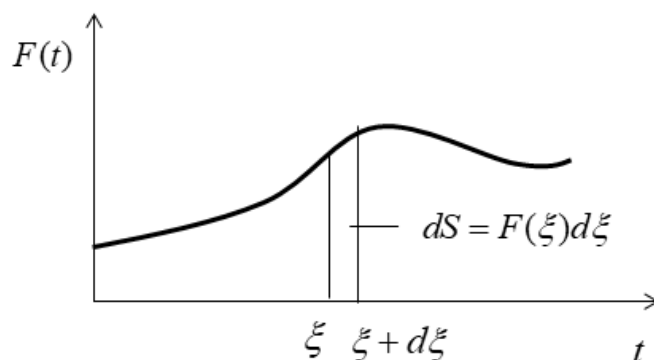


Рис. 40. Дія імпульсу сили

Використаємо рівняння вільних загасаючих коливань (61), які відбуваються після початкового збурення (x_0, \dot{x}_0) . Переміщення за часом відбувається у вигляді

$$x(t) = e^{-nt} \left(x_0 \cos \omega_{вл \partial} t + \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{\omega_{вл \partial}} \sin \omega_{вл \partial} t \right). \quad (86)$$

Рівняння (86) спрощується, якщо початкове зміщення відсутнє $(x_0 = 0)$:

$$x(t) = e^{-nt} \frac{\dot{x}_0}{\omega_{вл \partial}} \sin \omega_{вл \partial} t, \quad (87)$$

тобто відбуваються загасаючі коливання з частотою $\omega_{вл \partial} \approx \omega_{вл}$.

Від імпульсу сили, який прикладений в момент ξ , виникає приріст швидкості

$$d\dot{x}(\xi) = \frac{F(\xi)d\xi}{m},$$

він не залежить від переміщення і швидкості тіла в цей момент часу. Розглядаючи цей приріст швидкості як початкову швидкість для моменту часу ξ , одержуємо приріст переміщення від $d\dot{x}(\xi)$ у довільний момент часу t

$$dx(t) = \frac{dS(\xi)}{m\omega_{вл \partial}} e^{-n(t-\xi)} \sin \omega_{вл \partial} (t-\xi) = \frac{d\dot{x}(\xi)}{\omega_{вл} \sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_{вл}(t-\xi)} \sin \sqrt{1-\zeta^2} \omega_{вл} (t-\xi).$$

Повне переміщення від безперервної дії сили $F(t)$ (окремих імпульсів сил) буде

$$x(t) = \frac{e^{-nt}}{m\omega_{вл \partial}} \int_0^t e^{n\xi} F(\xi) \sin \omega_{вл \partial} (t-\xi) d\xi. \quad (88)$$

Воно містить як сталі, так і несталі форми руху. Це і є інтеграл Дюамеля. Його використання є особливо зручним, якщо відомий аналітичний вигляд функції $F(t)$. При невідомій аналітичній залежності

інтеграл (88) можна обчислити приблизно, за допомогою числового інтегрування.

Переміщення в системі з урахуванням x_0 і \dot{x}_0 набуває вигляду

$$x(t) = e^{-nt} \left[x_0 \cos \omega_{вл \delta} t + \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{\omega_{вл \delta}} \sin \omega_{вл \delta} t + \frac{e^{-nt}}{m \omega_{вл \delta}} \int_0^t e^{n\xi} F(\xi) \sin \omega_{вл \delta} (t - \xi) d\xi \right]. \quad (89)$$

У завданні слід зіставити точне рішення на основі (88) і (89) з рішенням на основі числового інтегрування рівнянь руху конструкції.

Нерівності злітно-посадкової смуги

При русі по аеродрому джерелом діючих на ЛА зовнішніх змінних сил є нерівності поверхні і неоднорідність ґрунту. Нерівність аеродромного покриття подається у вигляді реалізацій або спектральних густин по одному або декількох лініях уздовж напрямку руху літака.

На рис. 41 показані приклади профілів нерівностей і міцності ґрунту вздовж полоси довжиною L .

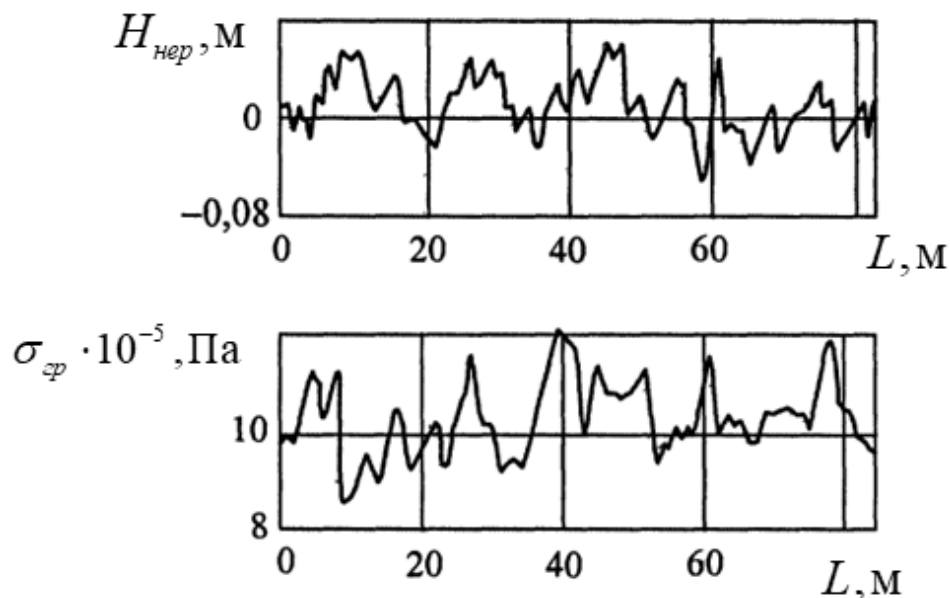


Рис. 41. Профіль нерівностей полоси і міцність ґрунту

Нерівність злітно-посадкової смуги характеризується величиною ухилів і зломом рельєфу, розмірами виступів (западин) і т. ін. На ґрунтових смугах нерівності додатково виникають у результаті взаємодії пружного ґрунту з опорами літака. Після кожного проходу літака в ґрунті виникають залишкові деформації. При великій кількості проходів деформації накопичуються, внаслідок чого розміри нерівностей збільшуються.

Задають нерівності злітно-посадкової смуги на основі двох підходів – детермінованого і випадкового.

Згідно з детермінованим підходом вимушені коливання збуджуються від дії сил, заданих як функції часу. На пробігу задається форма нерівностей і внаслідок кінематичного збудження в конструкції виникають детерміновані за часом коливання.

Оцінюють нерівності злітно-посадкової смуги зазвичай за їх висотою h і протяжністю λ . Розрізняють нерівності великої протяжності – макронерівності, які визначають загальний рельєф злітно-посадкової смуги, і мікронерівності, що являють собою місцеві зміни висот профілю смуги.

Макронерівності характеризуються попутними і зустрічними ухилами на базі понад 50 м. Іноді загальний рельєф смуги характеризується лінією видимості літака. За вимогами НАТО рельєф злітно-посадкової смуги зі штучним покриттям повинен мати зустрічний нахил не більше 1,0...1,5%. Пряма видимість літака висотою 3 м має забезпечуватися на відстані 1800 м. Для ґрунтових злітно-посадкових смуг допускається величина зустрічних ухилів має бути не більшою 2,5%.

Місцеві нерівності оцінюються відхиленням профілю смуги від лінійки довжиною 3 м. Це відхилення задається окремо для штучних покриттів і ґрунтових смуг [4] у вигляді косинусоїди:

$$y = 0,5 h_{\max} \left(1 - \cos \frac{2\pi s}{\lambda} \right), \quad (90)$$

де h_{\max} – найбільша висота виступу; зазвичай приймають $h_{\max} = 120$ мм;

$s = Vt$ – поточна координата; t – час; V – швидкість руху літака; λ – довжина хвилі.

Між висотою нерівності і довжиною хвилі існує залежність. Приблизний характер залежності h від λ для дискретних нерівностей показаний на рис. 42.

Нерівності можуть зустрічатися у вигляді безперервних і дискретних послідовностей виступів (западин), наприклад

$$y(s) = h(1 - e^{-\gamma s}), \quad (91)$$

де h – межа, до якої прямує висота нерівності;

γ – параметр, який задає кривизну профіля.

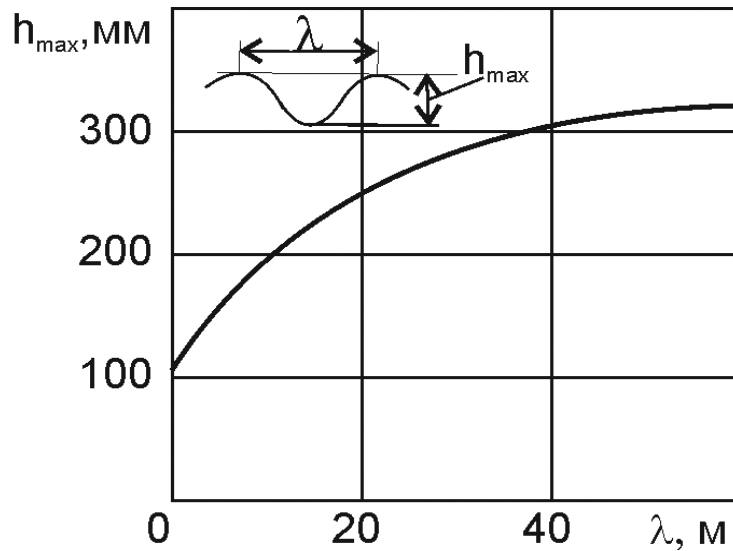


Рис. 42. Характеристика дискретної нерівності

На рис. 43 показано вид даної кривої при різних значеннях γ .

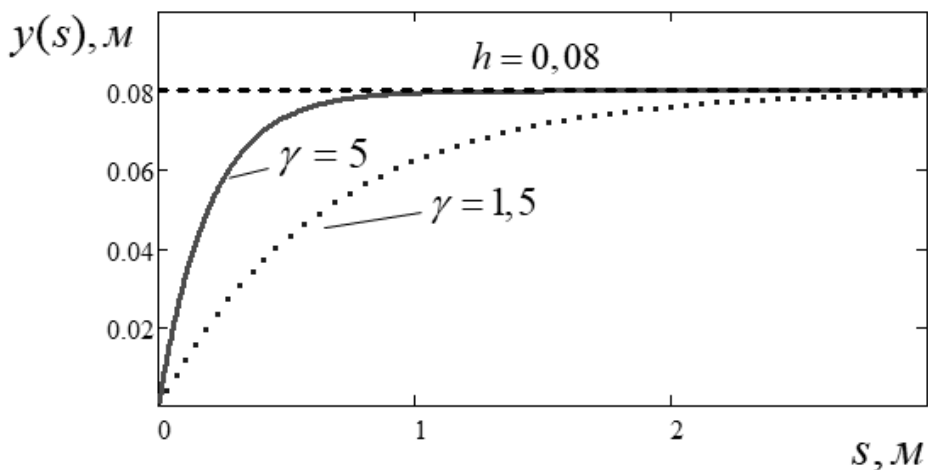


Рис. 43. Дискретний виступ

Періодична функція, яка задає довільні нерівності, може бути наведена рядом Фур'є

$$y(t) = a_0 / 2 + a_1 \cos(\omega_1 t) + a_2 \cos(\omega_2 t) + \dots + b_1 \sin(\omega_1 t) + b_2 \sin(\omega_2 t) + \dots, \quad (92)$$

де

$$\omega_1 = 2\pi / T; \quad \omega_n = n\omega_1 \quad (93)$$

– колова частота основного періоду (основна частота) і частота n -ї гармоніки, T – період.

Коефіцієнти a_n і b_n в (92) визначають з рівнянь

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) \cos \omega_n t dt; \\
 b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) \sin \omega_n t dt.
 \end{aligned}
 \tag{94}$$

Дискретним спектром Фур'є називається залежність величини $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ (амплітуда n -ї гармоніки) від частоти ω_n . Він дозволяє проаналізувати вплив номера гармоніки з певною частотою, які являють собою періодичну функцію $y(t)$.

У більшості технічних задач коливання збуджуються випадковими впливами. Прикладом випадкових коливань є коливання ЛА на пробігу, які викликані нерівностями як випадковими функціями. Поздовжній профіль полоси являє собою випадкову функцію. Вид цієї функції залежить від місця, де проводили заміри, і багатьох інших чинників. Випадкова функція задається безліччю реалізацій. Існують різні її вірогідні характеристики – математичне очікування, дисперсія та кореляційна функція.

Важливою стаціонарною функцією є щільність розподілу дисперсії за частотою – спектральна функція випадкового процесу. Її визначають на основі статистичного аналізу. За допомогою спектрального розкладання стаціонарна випадкова функція може бути наведена як сукупність гармонічних випадкових функцій заданих частот.

Розрахункова схема механічної системи

Літак після приземлення і при русі по полосі деякий час збалансований за моментами ($M_z = 0$) і спирається тільки на основні стояки шасі (рис. 44, а). У цьому випадку для аналізу руху ЛА і його коливань може бути застосовано спрощену модель, в якій літак розглядається як система з одним ступенем вільності (рис. 44, б).

Як видно, розрахункова схема являє собою простий лінійний осцилятор. Як бачимо, розрахункова схема літака на пробігу – це одномасова пружно-в'язка система. Вважаємо, що на масу діють зовнішні сили – сили тяжіння і аеродинамічна сила демпфірування. На опорні елементи діють сили реакції поверхні внаслідок їх зміщення за певним законом. Крім того, у системі існує невелике внутрішнє тертя, яке викликано деформуванням пневматика. Аеродинамічне демпфірування і сили внутрішнього тертя можуть бути визначені через коефіцієнт в'язкого тертя α .

За узагальнену координату прийємо вертикальне переміщення в центрі мас літака. Маса на посадці значно менше злітної, тому далі вважаємо, що амортизатори шасі на пробігу (при невеликій реакції опори R_{on}) не обтискаються. Це дозволяє достатньо просто задати жорсткість амортизації шасі – через жорсткість пневматиків

$$C_{ам} = C_{пн \Sigma} = C,$$

де $C_{пн \Sigma}$ – жорсткість пневматиків усіх коліс на основних стояках шасі

$$C_{пн \Sigma} = \sum_i C_{пні}.$$

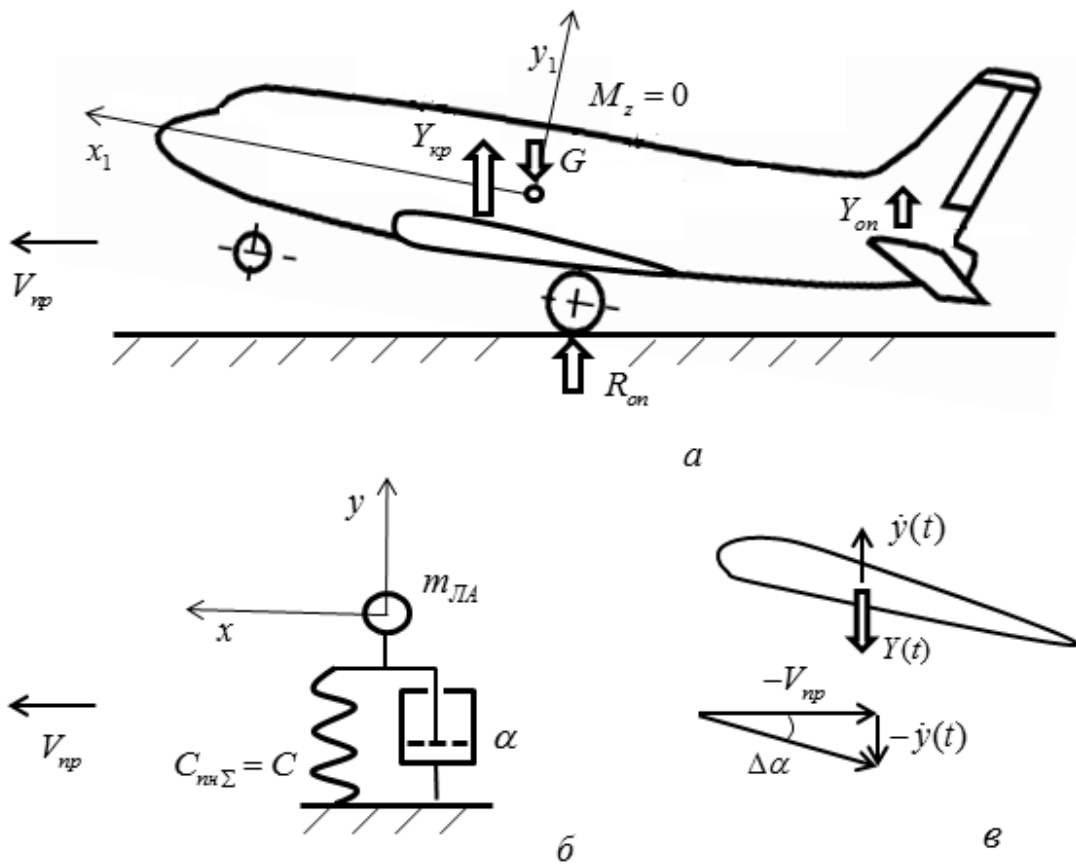


Рис. 44. Спрощена модель літака як системи з одним ступенем вільності

Отже, ми вважаємо, що пневматики всіх коліс на основних стояках шасі працюють паралельно. Для визначення сумарної жорсткості пневматиків $C = C_{пн \Sigma}$ необхідно підібрати колеса до ЛА [6].

На сучасних важких літаках використовують схеми багатокісних шасі. Колеса об'єднуються у візки (дво- або багатокісна) або встановлюються на двох напівосях, які закріплюються до силового стояка.

За схемою шасі (рис. 45) визначають стоянкове навантаження на одне колесо.

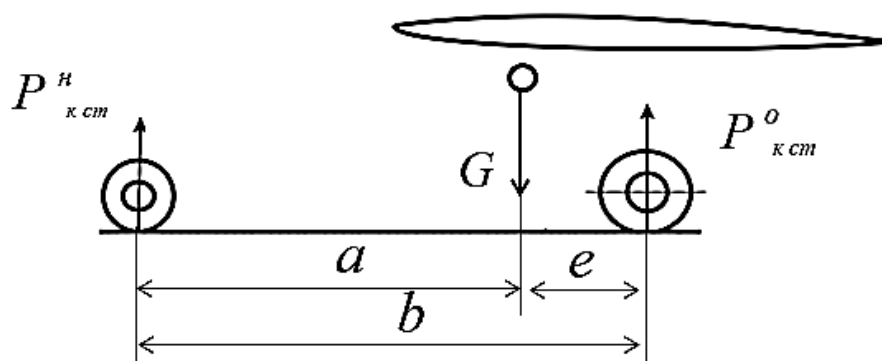


Рис. 45. Зусилля, що діють на колеса шасі на стоянці

Для колеса основної опори

$$P_{кст}^н = \frac{mge}{bz_o}; \quad (94)$$

для колеса носової опори

$$P_{кст}^о = \frac{mge}{bz_n}, \quad (95)$$

де m – розрахункова маса літака;

z_n, z_o – кількість коліс на носовій і основній опорах відповідно;

b, e – поздовжня база шасі та винос основних коліс.

Значення $P_{кст}^о$ і $P_{кст}^н$ мають визначатися як для посадкової, так і для злітної маси літака.

Основне колесо підбирають так, щоб стоянкове навантаження, а також потрібна енергоємність гальм дорівнювали або були менше значень відповідних величин, зазначених у каталозі. Якщо фактичні швидкості експлуатації перевищують швидкості, зазначені в каталозі, то це призводить до збільшення навантажень на пневматик, його перегріву і, як наслідок, до прискореного зносу і різкого скорочення терміну служби експлуатації. Необхідно також, щоб енергоємність гальм, зазначена в каталозі, була не менше потрібної енергоємності. В іншому випадку можливий перегрів гальм, що також призведе до зменшення терміну експлуатації.

Якщо стоянкове навантаження $P_{кст}$ менше стоянкового навантаження, зазначеного в каталозі, то за умовою збереження

стоянкового обтиснення визначають потрібне значення зарядження пневматика:

$$p_o = p_{o\max} \frac{P_{к\text{ ст}}}{P_{\text{ст max}}}, \quad (96)$$

де $p_{o\max}$ – тиск у пневматику, що відповідає $P_{\text{ст max}}$.

Зусилля P_k , прикладене до колеса, викликає його обтиснення на величину δ . Залежність сили від обтиснення δ прийнято називати діаграмою роботи колеса (рис. 46).

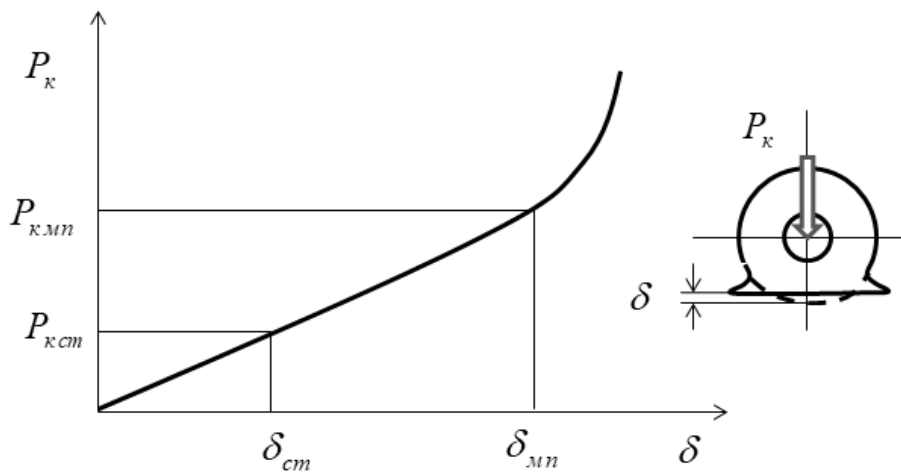


Рис. 46. Діаграма роботи колеса

Характерні точки діаграми:

– $\delta_{\text{ст}}$, $P_{к\text{ ст}}$ – допустимі значення стоянкового обтиснення і навантаження при злітній і посадковій масах;

– $\delta_{\text{мп}}$ і $P_{к\text{ мп}}$ – максимально припустимі обтиснення і навантаження на колесо одного стояка шасі при поглинанні експлуатаційної енергії.

Залежність $P_k(\delta)$ в експлуатаційному діапазоні обтиснення пневматика практично лінійна, тому жорсткість пневматика колеса $C_{\text{пн}}$, Н/м, наближено визначається так:

$$C_{\text{пн}} = P_{\text{мп}} / \delta_{\text{мп}}. \quad (97)$$

Рівняння вимушених коливань ЛА на пробігу

Встановимо рівняння руху одномасової системи (рис. 47), який викликаний нерівністю аеродрому.

До моменту $t = 0$ літак рухається по ідеально рівному аеродрому – сила тяжіння врівноважена силою реакції опор шасі. Ці сили

врівноважені, і надалі їх враховувати не будемо. Положення центру мас, яке відповідає рівновазі, прийmemo за вихідне. Із центром мас ЛА пов'язуємо інерціальну систему координат $Oxuz$. Швидкість літака спрямована вздовж осі Ox .

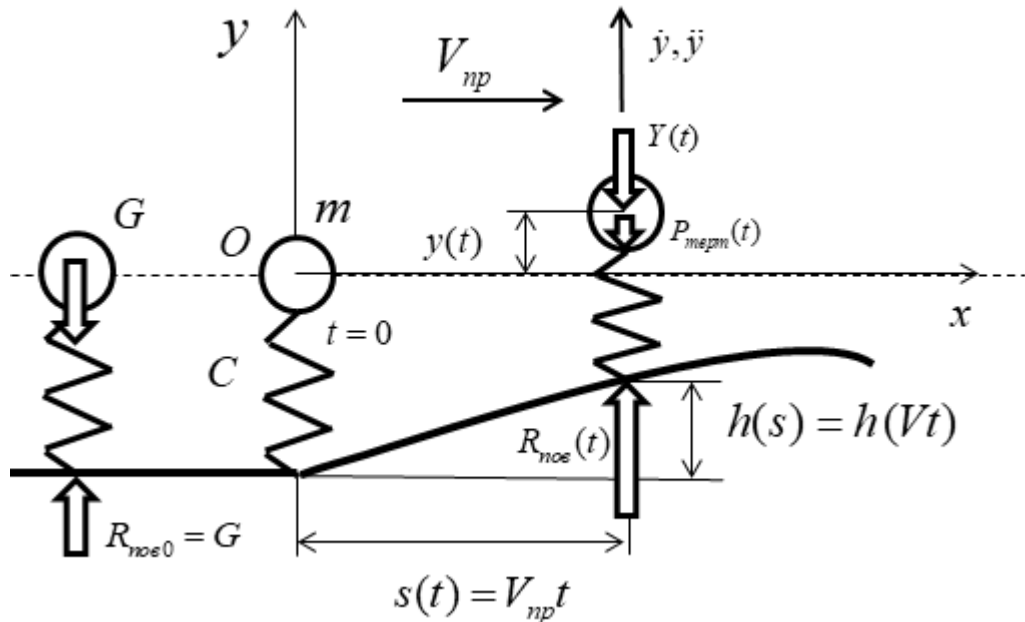


Рис. 47. Вимушені коливання ЛА при русі по аеродрому

Профіль нерівності задаємо деякою функцією $h(s)$, де s – дистанція, яку пройшов ЛА, визначають формулою

$$s(t) = V_{np} t.$$

Після наїзду на нерівність рух літака є збуреним, починаються коливання центру мас літака (рис. 47). Зміною швидкості V_{np} на пробігу нехтуємо. У системі виникають додаткові (збурені) нестационарні зовнішні сили – реакція поверхні полоси $R_{noe}(t)$ і аеродинамічна сила демпфірування $Y(t)$. Аеродинамічна сила пов'язана з вертикальною швидкістю ЛА і має в'язку природу. На рис. 44, в показано трикутник швидкостей і природу виникнення додаткового кута атаки літака $\Delta\alpha$.

Збурена швидкість $\dot{y}(t)$ літака приводить до зміни кута атаки, виникає аеродинамічна сила демпфірування $Y(t)$, яка спрямована протилежно швидкості $\dot{y}(t)$

$$Y(t) = C_y^\alpha \Delta\alpha \frac{\rho V_{np}^2 S}{2},$$

де C_y^α – похідна коефіцієнта піднімальної сили ЛА;

S – характерна площа літака;

$\Delta\alpha$ – приріст кута атаки,

$$\Delta\alpha \approx \frac{\dot{y}(t)}{V_{np}}.$$

Таким чином, аеродинамічна сила демпфірування пропорційна швидкості ЛА

$$Y(t) = C_y^\alpha \frac{\rho V_{np}^2}{2} S \dot{y}(t); \quad (98)$$

$$Y(t) \sim \dot{y}(t).$$

Сили внутрішнього тертя $P_{мерпм}(t)$ визначаються внутрішнім демпфіруванням у пневматиках, іноді ними можна знехтувати.

Рівняння збуреного руху напишемо в проекції на вісь y . В момент часу t маємо

$$\begin{aligned} m \ddot{y}(t) &= -Y(t) - P_{мерпм}(t) + C(h(Vt) - y(t)) = \\ &= -\alpha_1 \dot{y}(t) - \alpha_2 (\dot{h}(Vt) - \dot{y}(t)) + C(h(Vt) - y(t)), \end{aligned} \quad (99)$$

де $C(h(Vt) - y(t))$ – сила пружності, яка виникає внаслідок деформації пневматиків;

$\alpha_1 \dot{y}(t)$ – сила тертя (має аеродинамічну природу, вона пов'язана із зовнішнім обтіканням ЛА), спрямована протилежно швидкості руху літака. З (98) видно, що коефіцієнт аеродинамічного тертя

$$\alpha_1 = C_y^\alpha \frac{\rho V_{np}^2}{2} S;$$

$\alpha_2 (\dot{h}(Vt) - \dot{y}(t))$ – сила в'язкого тертя в пневматиках та інших рухомих частинах. Сила пропорційна відносній швидкості їх руху $V_{відн}(t) = \dot{h}(Vt) - \dot{y}(t)$. Отже, проекція сили в'язкого тертя становить $(-\alpha_1 \dot{y}(t) - \alpha_2 (\dot{h}(Vt) - \dot{y}(t)))$.

Слід відмітити, що в рівнянні відсутні сили тяжіння G і початкова сила реакції полоси $R_{on\ 0} = G$, які скомпенсували одна одну.

Рівняння (99) перепишемо у звичній формі

$$m \ddot{y}(t) + (\alpha_1 + \alpha_2) \dot{y}(t) + C y(t) = C h(Vt) - \alpha_2 \dot{h}(Vt), \quad (100)$$

де права частина вказує на вимушений зовнішній вплив

$$F(t) = C h(Vt) - \alpha_2 \dot{h}(Vt). \quad (101)$$

Поділивши на масу, отримаємо такі розповсюджені форми запису рівняння

$$\ddot{y}(t) + 2n \dot{y}(t) + \omega_{en}^2 y(t) = F(t) / m \quad (102)$$

або

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_{вл} \dot{y}(t) + \omega_{вл}^2 y(t) = F(t) / m, \quad (103)$$

де прийняті такі позначення:

$$n = \frac{\alpha}{2m}; \quad \zeta = \frac{\alpha}{\alpha_{кр}}; \quad \alpha_{кр} = 2m\sqrt{\frac{C}{m}}.$$

Коефіцієнт в'язкого тертя α_1 можна визначити наближено. Виходячи з фізичних міркувань щодо темпу згасання коливань ЛА на пружному шасі, задаємо відношення двох послідовних амплітуд $\frac{A_k}{A_{k+1}}$. Тоді декремент загасань буде таким:

$$\delta = \ln\left(\frac{A_k}{A_{k+1}}\right),$$

звідки

$$\alpha_1 = \zeta\alpha_{кр},$$

де

$$\zeta = \frac{\delta}{2\pi}.$$

Вихідними даними при виконанні завдання є:

- злітна і посадкова маси, швидкість літака-прототипу на пробігу;
- похідна коефіцієнта піднімальної сили за кутом атаки, площа крила;
- схема шасі і розташування центру мас;
- профіль нерівностей аеродрому.

Приклад виконання завдання № 2

Літак масою $m_{нос} = 35000$ кг має сумарну жорсткість пневматиків на основних стояках $C = 6,38 \cdot 10^6$ Н/м. Коефіцієнт демпфірування в системі $\zeta = 0,029$.

При наїзді на дискретні нерівності виду (91) з параметрами $\gamma = 2$, $h_0 = 0,08$ м і (90) з параметрами $h_{max} = 0,3$ м і $\lambda = 40$ м відбуваються згасаючі коливання центру мас літака – відповідно криві 1 і 2 (рис. 48). Дані криві слід визначити на основі інтеграла Дюамеля та чисельно, на основі диференціальних рівнянь руху.

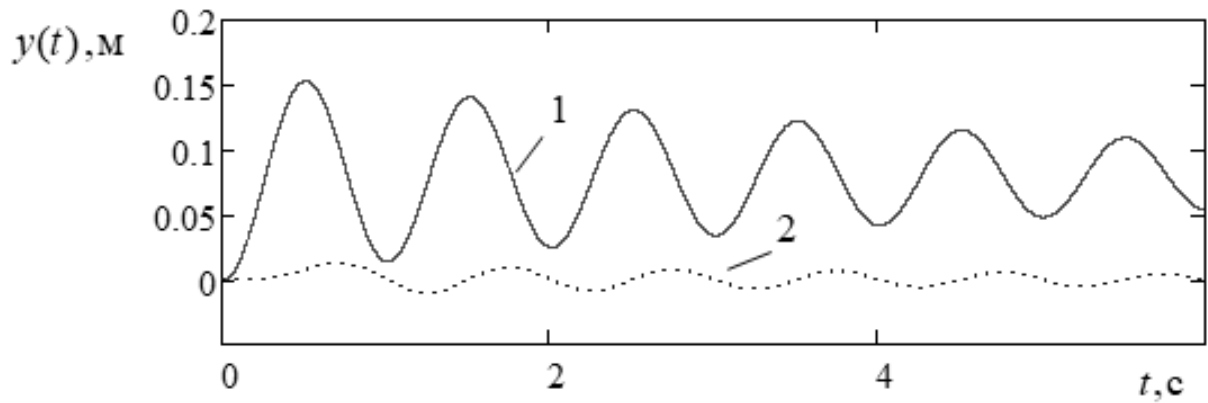


Рис. 48. Коливання центру мас літака при наїзді на дискретні нерівності

Як видно, динамічна реакція літака залежить від виду зовнішнього збурення. Коливання відбуваються з власною частотою. Їх згасання є невеликим. Це пов'язано з малим демпфіруванням у системі.

Перевантаження в центрі мас ЛА (рис. 49) у випадку наїзду на дискретну нерівність (91) сягає небезпечного рівня.

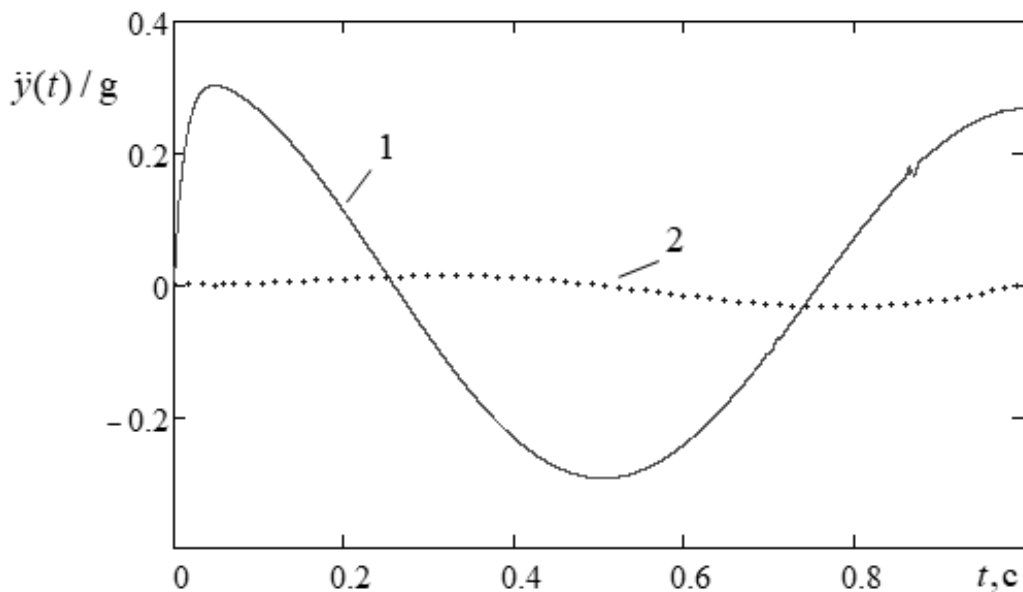


Рис. 49. Перевантаження в центрі мас літака при наїзді на дискретні нерівності

Розглянемо дію на літак періодичних гармонічних нерівностей

$$h(s) = h_0 \sin\left(\frac{\pi s}{\lambda}\right),$$

де h_0 – амплітудне відхилення; λ – довжина хвилі. Прийmemo достатньо невелике значення $h_0 = 0,02\text{ м}$ на довжині $\lambda = 5\text{ м}$.

На рис. 50 показано зміну перевантаження в центрі мас при русі по синусоїдальній нерівності. Як видно, на перехідному режимі існують коливання з власною частотою ($f_{в.л} = 2,15$ Гц) і частотою зовнішнього впливу ($f_e = 0,5$ Гц). За декілька секунд встановлюються сталі вимушені коливання.

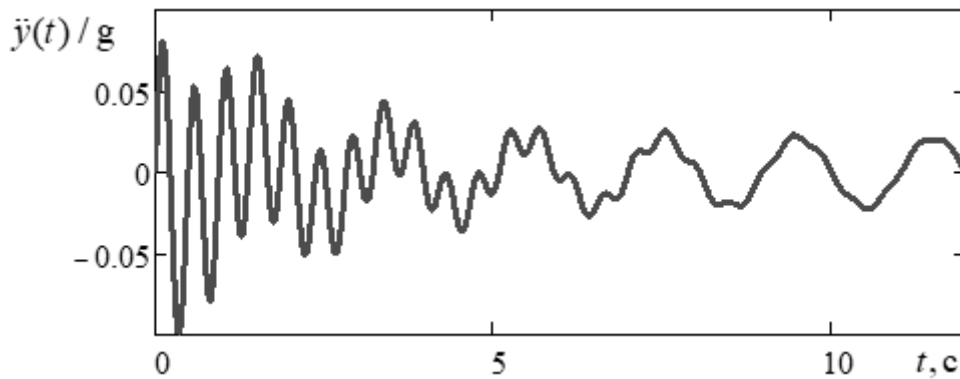


Рис. 50. Вимушені перехідні коливання літака

Графік залежності коефіцієнта динамічності β від частоти ω_B показаний на рис. 51. Існує швидкість руху, на якій відбувається резонанс. В експлуатації таких швидкостей треба по можливості уникати. Для зменшення коефіцієнта динамічності слід збільшувати демпфірування в системі.

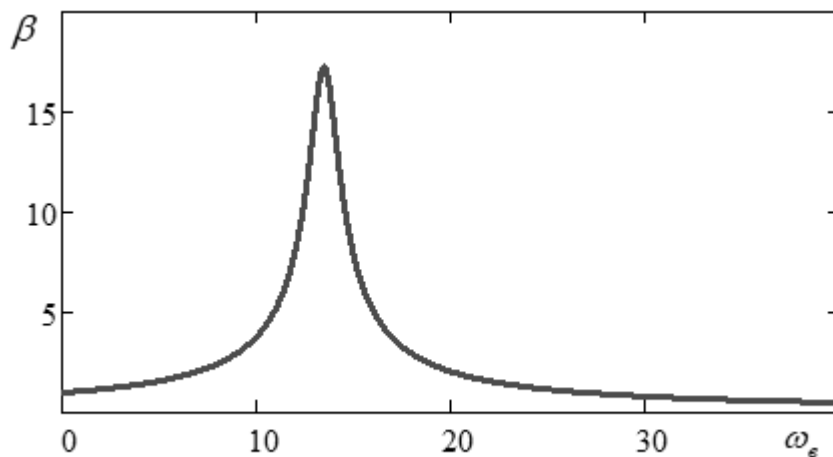


Рис. 51. Залежність коефіцієнта динамічності β від частоти ω_B

На рис. 52 показано графік залежності кута зсуву фази від колової частоти ω_B . Як видно, до резонансу внаслідок достатньо малого демпфірування переміщення і діюча сила знаходяться майже в одній фазі, а після резонансу – в протифазі.

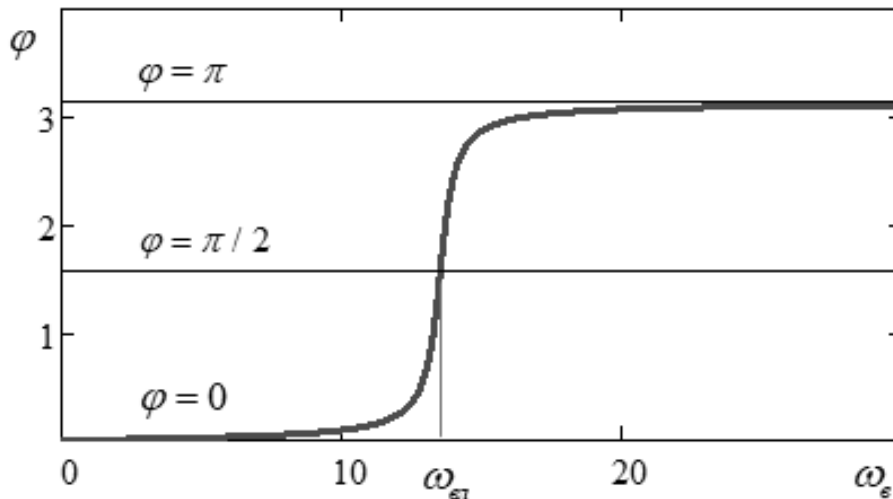


Рис. 52. Залежність зсуву фази від частоти

Висновки: для оцінки навантаження ЛА на пробігу необхідно знати власну частоту коливань системи і характеристики зовнішнього впливу. Небезпечним у процесі експлуатації ЛА є резонанс. Для зменшення навантаження конструкції слід уникати «резонансних» швидкостей літака і збільшувати демпфірування в системі.

Завдання № 3

Визначення згинальної жорсткості консолі крила методом Релея

Літальний апарат являє собою складну систему з просторовою геометрією і розподіленими масою і жорсткістю, великою кількістю вантажів. Він навантажений аеродинамічними й інерційними силами, в місцях кріплення вантажів або агрегатів діють зосереджені сили. Забезпечення міцності ЛА – важливе і складне завдання, бо конструкція має задовольняти вимоги високої безпеки при мінімальній масі силових елементів.

Очевидний, на перший погляд, шлях забезпечення міцності за допомогою збільшення площ поперечних перерізів елементів конструкцій в деяких випадках є неефективним. Пошук оптимальних рішень у задачах динаміки і міцності ЛА – довгий і непростий процес. У ході робіт беруть до уваги загальні методи й засоби профілактики та «лікування» ЛА від небезпечних явищ аеропружності: підвищення жорсткості всіх елементів конструкції при незмінному співвідношенні цих жорсткостей; зміну співвідношення жорсткостей, що поліпшують характеристики аеропружності.

В завданні треба оцінити жорсткість консолі крила в першому наближенні, орієнтуючись на статистичні дані щодо масових характеристик крила і його динамічних характеристик – частот власних коливань.

Консоль крила як коливальна система має нескінченне число степенів вільності. Методом Релея її наближено можна звести до системи з одним степенем вільності і знайти власну частоту коливань. У завданні, користуючись методом Релея і статистичними даними щодо частоти власних коливань, треба розрахувати жорсткість крила на згин.

Існують два варіанти методу Релея.

У першому варіанті вибирають форму коливань, яка задовольняє кінематичним граничним умовам. Обчислюють амплітудні значення кінетичної і потенціальної енергій консервативної системи і визначають власну частоту.

У другому варіанті методу Релея вибирають не форму коливань, а деяке навантаження – розподілене або зосереджене. Визначають форму кривої переміщень від вибраного навантаження. Робота навантаження на спричиненому ним переміщенні дорівнює амплітудному значенню потенціальної енергії.

Слід відмітити, що власна частота, яка визначається методом Релея, буде трохи вищою, ніж основна частота первинної системи, якщо прийнята форма коливань відрізняється від реальної форми.

Мета завдання – визначити згинальну жорсткість консолі крила літака-прототипу на основі статистичних даних щодо частоти власних коливань ЛА.

Для цього необхідно:

- замінити крило літака–прототипу спрямленим крилом;
- для спрямленої консолі крила визначити розподіл погонної маси (від маси конструкції й палива), а також знайти зосереджені маси від двигунів, шасі, тощо та їх координати;
- за статистикою прийняти основну частоту власних коливань консолі крила;
- на основі формули Релея визначити згинальну жорсткість у защемленні крила для певного її розподілу вздовж розмаху консолі.

Теоретичні положення і методичні вказівки до виконання домашнього завдання

Припущення і гіпотези:

- крило літака–прототипу (довільної форми в плані) зводиться до трапецієподібного спрямленого крила;
- консоль крила закріплена до нерухомого фюзеляжу;
- центри мас на крилі розміщені на осі жорсткості;
- вісь жорсткості прямолінійна і розміщена на 40...50 % хорди крила;
- розглядаються ізольовані згинальні вільні коливання консолі в площині найменшої жорсткості.

Спрямлене крило і його деформація

Крило літака-прототипу має довільну форму в плані і складний розподіл мас і жорсткостей вздовж розмаху (рис. 53, а).

Вважаємо, що крило є призматичним вздовж розмаху і трапецієподібним на вигляді в плані (рис. 53, б). Розподіл хорд – лінійний за довжиною

$$b(\bar{z}) = b_0 - (b_0 - b_k)\bar{z}, \quad (104)$$

де $\bar{z} = z/l_k$ – відносна координата;

l_k – розмах консолі;

b_0, b_k – коренева та кінцева хорди крила;

Всі лінійні розміри в перерізі \bar{z} змінюються за законом зміни хорди $b(\bar{z})$.

Вважаємо, що геометричні місця центрів жорсткості поперечних перерізів крила лежать на прямій лінії і утворюють так звану вісь жорсткості балки.

Спрямлене крило має таку ж площу, як і вихідне:

$$S_k = \frac{b_0 + b_k}{2} \cdot l_k.$$

На рис. 53 крило замінено еквівалентною балкою, вісь якої розташована вздовж осі жорсткості реального крила. За осьову лінію балки вибираємо геометричні місця центрів жорсткості поперечних перерізів.

Всі маси на крилі розташовані вздовж осі жорсткості. Погонну масу консолі крила розраховуємо за наближеною формулою

$$m_n(z) = \frac{m_k + m_{нал}}{S_k} \cdot b(z), \quad (105)$$

де m_k – маса конструкції консолі;

$m_{нал}$ – маса палива в консолі крила;

S_k – площа консолі.

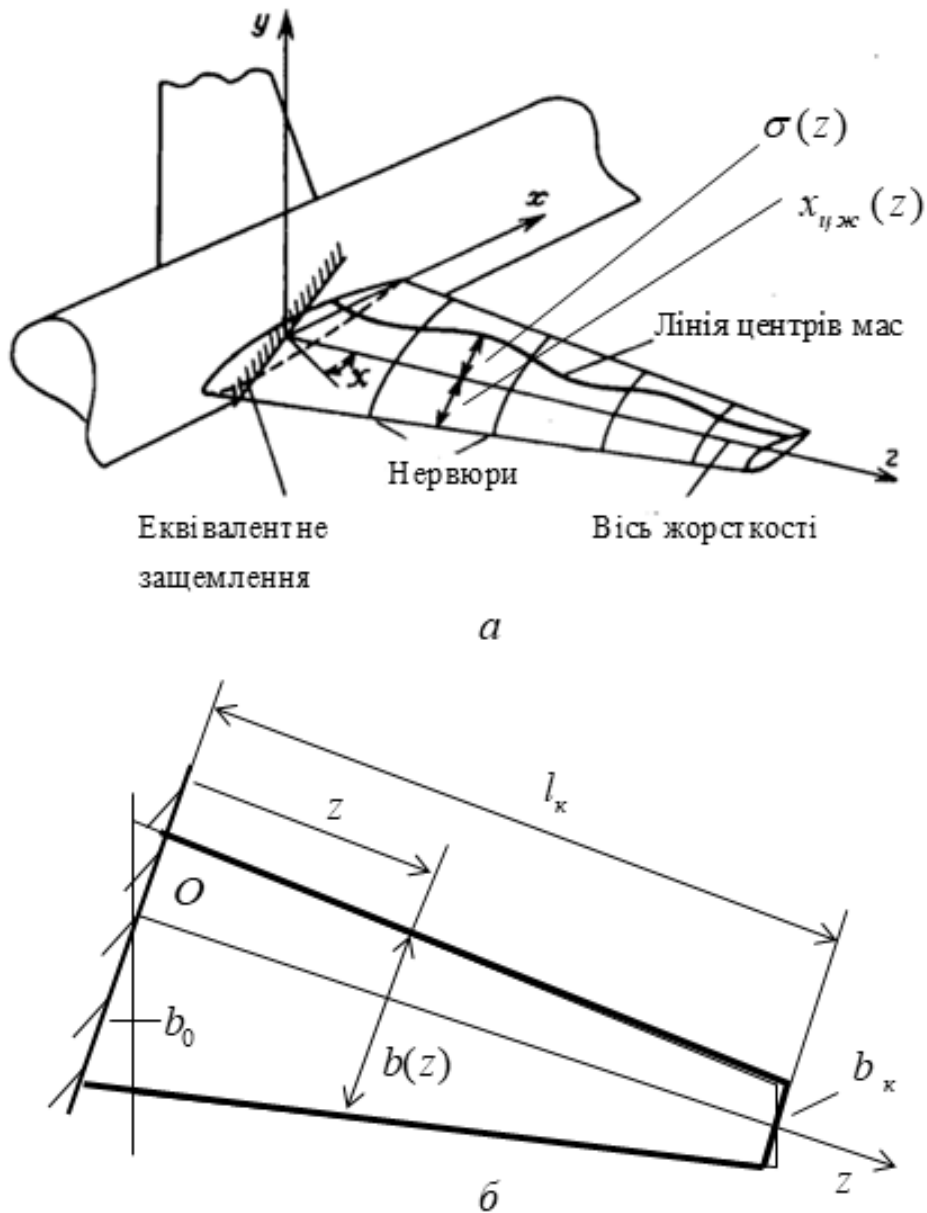


Рис. 53. Схематизація крила великого подовження у вигляді балки змінної жорсткості

З формули (105) випливає, що паливо розташоване в паливних баках вздовж всієї консолі. Крім того, вважаємо, що маса консолі розподілена пропорційно площі крила.

Зосереджені маси (двигунів, шасі, тощо) розміщені вдовж осі жорсткості, і відомі їх координати (рис. 54). Координати мас відраховують вздовж осі z . Система координат $Oxuz$ є правою, її початок розміщено в місці защемлення еквівалентної балки.

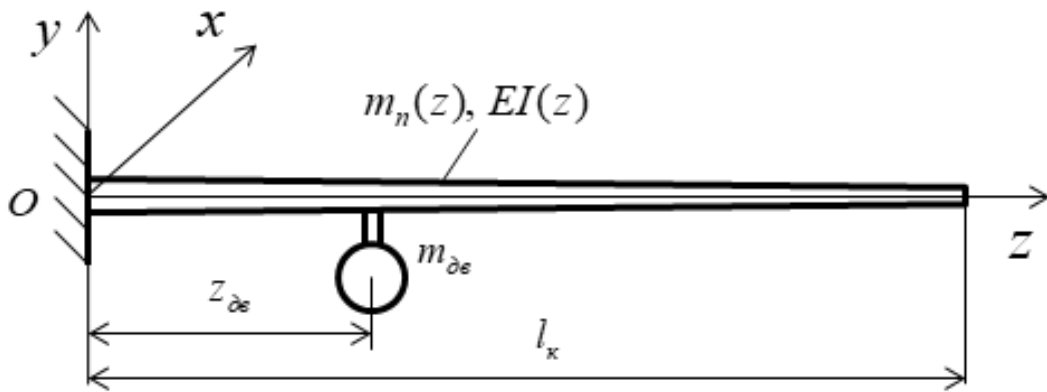


Рис. 54. Розрахункова схема консолі крила

Деформація балки визначається дією в перерізах крила згинальних моментів (деформацією зсуву в перерізах крила нехтуємо) і описується диференціальним рівнянням

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_{3z}(z)}{EI(z)}, \quad (106)$$

де $\frac{1}{\rho}$ – кривизна осі жорсткості крила в площині yz ;

$M_{3z}(z)$, – згинальний момент, що діє в перерізі z ;

$EI(z)$ – згинальна жорсткість консолі крила.

Скористаємося наближеним співвідношенням для кривизни

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2 y}{dz^2}.$$

Визначення згинальної жорсткості крила

Консоль крила являє собою систему з нескінченним числом степенів вільності, яку наближено можна привести до системи з одним ступенем вільності, якщо апіорі відома конфігурація системи при коливаннях – так звана форма коливань [3]. Задаючи певну форму коливань системі з розподіленою масою і жорсткістю, ми зводимо її до одного ступеня вільності. Власну частоту коливань такої схематизованої системи знаходять за допомогою енергетичного методу, званого методом Релея.

Релей довів теорему, згідно з якою власна частота коливань (при апіорних припущеннях щодо форми коливань) у результаті розрахунків завжди дорівнює власній частоті коливань, отриманій на основі точних співвідношень, або більше неї. Дійсно, вибір форми пружної лінії коливань

стрижнів рівносильний введенню в систему додаткових обмежень (зв'язків), що приводять складну систему до системи, що має тільки один степінь вільності. Додаткові обмеження (зв'язки) можуть тільки збільшити жорсткість системи. Тому частота власних коливань завжди буде більшою порівняно з її точним значенням.

Згідно з методом Релея задають конфігурацію коливальної пружної системи під час її вільних коливань. Частоту коливань визначають із балансу енергії системи.

Розглянемо вільні згинальні коливання консолі крила погонної маси $m_n(z)$, закріпленої до фюзеляжу (умовно нерухомого) (рис. 54). Уявімо її у вигляді балки зі змінною згинальною жорсткістю $EI(z)$ вздовж розмаху. Прогин балки в процесі коливань змінюється за деяким законом $y(z, t)$. Згідно з методом Релея функція, що визначає форму балки в довільний момент часу, має вигляд

$$y(z, t) = q(t)f(z), \quad (107)$$

де $f(z)$ – функція, що заздалегідь призначається; $q(t)$ – деяка, поки невідома функція часу. Після апіорного задання $f(z)$ функція $q(t)$ однозначно задає конфігурацію системи, тому $q(t)$ часто називають узагальненою координатою.

Практично замість того, щоб задавати форму коливань, можна прикласти до балки деяке статичне навантаження і визначити за ним форму пружної лінії, яку і прийняти за форму коливань (рис. 55). Цей спосіб зручний тим, що граничні умови виконуються автоматично, хоч би яким було вибрано навантаження.

Задамо навантаження у вигляді будь-яких сил P_1, P_2, \dots, P_n , тоді потенціальну енергію згинання можна виразити через роботу цих сил:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i y_i, \quad (108)$$

де y_i – прогини, що викликаються прийнятою системою навантажень. За сили P_i доцільно прийняти фактичне навантаження конструкції розподіленими силами тяжіння $P_i = m_i g$.

Форму осі балки $f(z)$ слід вибирати з урахуванням заданого способу закріплення балки, тобто граничних умов.

При жорстко закріпленому кінці балки неможливі прогин і поворот у місці защемлення, тобто при $z = 0$

$$y(0, t) = 0 \quad \text{і} \quad \frac{\partial y(0, t)}{\partial z} = 0 \quad (109)$$

у будь-який момент часу. Тоді, очевидно, на функцію форми накладають такі обмеження:

$$f(0) = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{z=0} = 0. \quad (110)$$

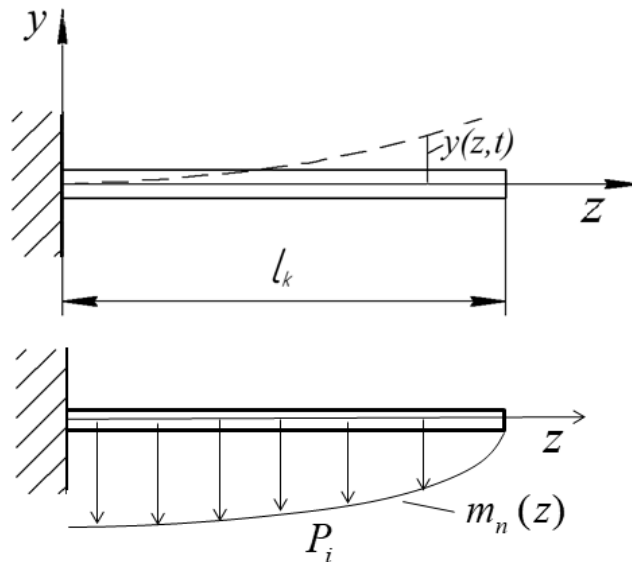


Рис. 55. Вільні згинальні коливання консолі крила

Ці умови кінематичні, тому що відносяться до переміщень і форми балки. На вільному кінці балки поперечна сила $Q_y(l_k)$ і згинальний момент $M_{зг}(l_k)$ у будь-який момент часу t дорівнюють нулю, тобто

$$\frac{\partial^2 y(l_k, t)}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 y(l_k, t)}{\partial z^3} = 0. \quad (111)$$

Ці граничні умови, які є силовими, з урахуванням (107) набувають вигляду

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_{z=l_k} = 0, \quad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}\right)_{z=l_k} = 0. \quad (112)$$

Переміщення точок, що лежать на осі балки, яка збігається з віссю жорсткості, в процесі вільних поперечних коливань описуються законом

$$y(z, t) = f(z) \sin(\omega_{вл} t + \varepsilon), \quad (113)$$

де $\omega_{вл}$ – частота власних коливань; ε – початкова фаза. Отже, всі точки балки одночасно досягають найбільших відхилень і положень рівноваги. Швидкості точок осі балки

$$\frac{dy}{dt} = \omega f(z) \cos(\omega_{вл} t + \varepsilon), \quad (114)$$

а їх максимальні швидкості

$$v_{max}(z) = \omega_{вл} f(z). \quad (115)$$

Найбільші відхилення при коливаннях

$$y_{max}(z) = f(z). \quad (116)$$

Максимальна потенціальна енергія деформації в положенні найбільшого відхилення

$$U_{max} = \frac{1}{2} \int_0^{l_k} EI(z)(y''_{max}(z))^2 dz = \frac{1}{2} \int_0^{l_k} EI(z)(f(z)'')^2 dz, \quad (117)$$

а максимальна кінетична енергія

$$T_{max} = \frac{1}{2} \int_0^{l_k} m_{\Pi}(z)v_{max}(z)^2 dz = \frac{\omega_{вл}^2}{2} \int_0^{l_k} m_{\Pi}(z)f(z)^2 dz, \quad (118)$$

де $m_{\Pi}(z)$ – погонна маса консолі.

Згідно із законом про збереження повної механічної енергії

$$T_{max} = U_{max},$$

звідки маємо формулу Релея (з урахуванням тільки погонних мас)

$$\omega_{вл}^2 = \frac{\int_0^{l_k} EI(z)(f(z)'')^2 dz}{\int_0^{l_k} m_{\Pi}(z)f(z)^2 dz}. \quad (119)$$

Відзначимо, що частоти власних згинальних коливань крила за першим тоном для маневрених літаків становлять 6,5...8,5 Гц, а для неманеврених – 1,5 ... 5,0 Гц.

Якщо форму балки $f(z)$ задати точно, то частота власних коливань буде визначена вірно. Наближене значення частоти, як зазначалося вище, завжди більше справжнього.

Визначимо на основі методу Релея згинальну жорсткість консолі крила $EI(z)$, якщо відома нижча згинальна частота коливань крила. Нехай зі статистики відома перша частота власних коливань крила $\omega_{вл1}$. Як форму коливань приймемо функцію

$$f(z) = \frac{z^2}{2l_k} - \frac{z^3}{3l_k^2} + \frac{z^4}{12l_k^3},$$

яка задовольняє всі граничні умови задачі:

$$f(0) = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{z=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_{z=l_k} = 0, \quad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}\right)_{z=l_k} = 0.$$

Знаючи погонну масу консолі $m_{\Pi}(z)$, що складається з маси конструкції крила і палива, а також масу вантажів m_i , маємо

$$\omega_{\text{ВЛ}1}^2 = \frac{\int_0^{l_k} EI(z)(f(z)''')^2 dz}{\int_0^{l_k} m_{\Pi}(z)f(z)^2 dz + \sum_{i=1}^N m_i f_i^2}, \quad (120)$$

де $f_i = f(z_i)$; z_i – координата вантажу; N – кількість вантажів.

Зі співвідношення (120) можна визначити функцію $EI(z)$, якщо відома частота власних коливань $\omega_{\text{ВЛ}}$. Прийнемо, що згинальна жорсткість змінюється за лінійним законом

$$EI(z) = EI(0)(1 - \bar{z}),$$

де $\bar{z} = \frac{z}{l_k}$, то з виразу (120) можна знайти значення згинальної жорсткості $EI(0)$ крила в місці прикріплення до фюзеляжу.

Метод Рітца

За допомогою способу Релея можна знайти завищену першу частоту. Більш точні значення основної частоти, а також частоти вищих тонів коливань отримують за допомогою методу Рітца. У методі Рітца в рівняння пружної лінії при коливаннях вводять кілька параметрів. Їх величини підбирають так, щоб частота основного тону коливань була мінімальною.

Наприклад, поперечні коливання балки наведемо у вигляді

$$y(z) = a_1 y_1(z) + a_2 y_2(z) + \dots, \quad (121)$$

причому функція $y_i(z)$ задовольняє граничні умови. Підставляючи вираз (121) в формулу Релея (120), бачимо, що результат залежить від коефіцієнтів a_1, a_2 і т. ін. (точніше – від a_i/a_j). Коефіцієнти підбирають з умови, щоб формула (120) мала найменше значення частоти. Для цього всі часткові похідні мають дорівнювати нулю:

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \left[\frac{\int_0^{l_k} EI(z)(f(z)''')^2 dz}{\int_0^{l_k} m_{\Pi}(z)f(z)^2 dz} \right] = 0.$$

Після перетворень

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \int_0^{l_k} \left[EI \left(\frac{d^2 y}{dz^2} \right)^2 - \omega_{\text{ВЛ}}^2 m y^2 \right] dz = 0.$$

Очевидно, що таких рівнянь стільки, скільки членів у ряду (121). Ці рівняння однорідні і лінійні щодо коефіцієнтів $a_1, a_2 \dots$. Прирівнюючи визначник зазначеної системи рівнянь нулю, отримуємо частотне рівняння.

Метод Рітца дозволяє знайти не тільки нижчу частоту, але і значення вищих частот, хоча і з меншою точністю. При цьому можна визначити стільки частот, скільки доданків прийнято у виразі (121).

Відмітимо, що на практиці частоти власних крутильних коливань крила за першим тоном для маневрених літаків становлять 30 ... 42 Гц, а для неманеврених – 2,5 ... 5,0 Гц. Закон розподілу згинальної і крутильної жорсткостей в довільному перерізі крила задаємо на підставі статистичних даних.

Приклад виконання завдання № 3

Для визначення згинальної жорсткості консолі крила Bombardier CRJ700 треба задати такі вихідні дані:

- злітну масу літака – 33000 кг;
- максимальну масу палива 8820 кг;
- площу крила $68,5 \text{ м}^2$;
- розмах крила 23,3 м;
- діаметр фюзеляжу 2,7 м.

Геометричні дані консолі показані на рис. 56.

Розмах стрілоподібної консолі з підфюзеляжною частиною – 11,65 м, коренева хорда – 5,2 м, кінцева хорда – 1,45 м, стрілоподібність по передній кромці – $26,5^\circ$.

Площа консолі

$$S = (S_{\text{кр}} - 0,25\pi d_{\text{ф}}^2)/2 = 31,44 \text{ м}^2.$$

Щоб визначити власну частоту коливань консолі крила, наведемо її до розрахункової схеми «консольна балка». Оскільки крило даного літака стрілоподібне (кут по передній кромці більше 15°), вводимо еквівалентне за площею пряме крило, перпендикулярне осі жорсткості (рис. 57).

Площа спрямленого крила – $31,44 \text{ м}^2$. Розмах спрямленої консолі – 10,76 м, коренева хорда – 4,575 м, кінцева хорда – 1,27 м.

Маса консолі за статистикою становить 5% від злітної маси літака

$$m_{\text{к}} = 0,05 \cdot m_{\text{зл}} = 0,05 \cdot 33000 = 1650 \text{ кг}.$$

Маса шасі літака за статистикою – 18.5% від маси конструкції, яка, в свою чергу, становить близько 30% від злітної маси. Тоді, якщо вважати, що маса стояка пропорційна навантаженню на неї на стоянці (45%), то

$$m_{\text{ш}} = 0,185 \cdot 0,3 \cdot 0,45 \cdot 33000 = 824,18 \text{ кг}.$$

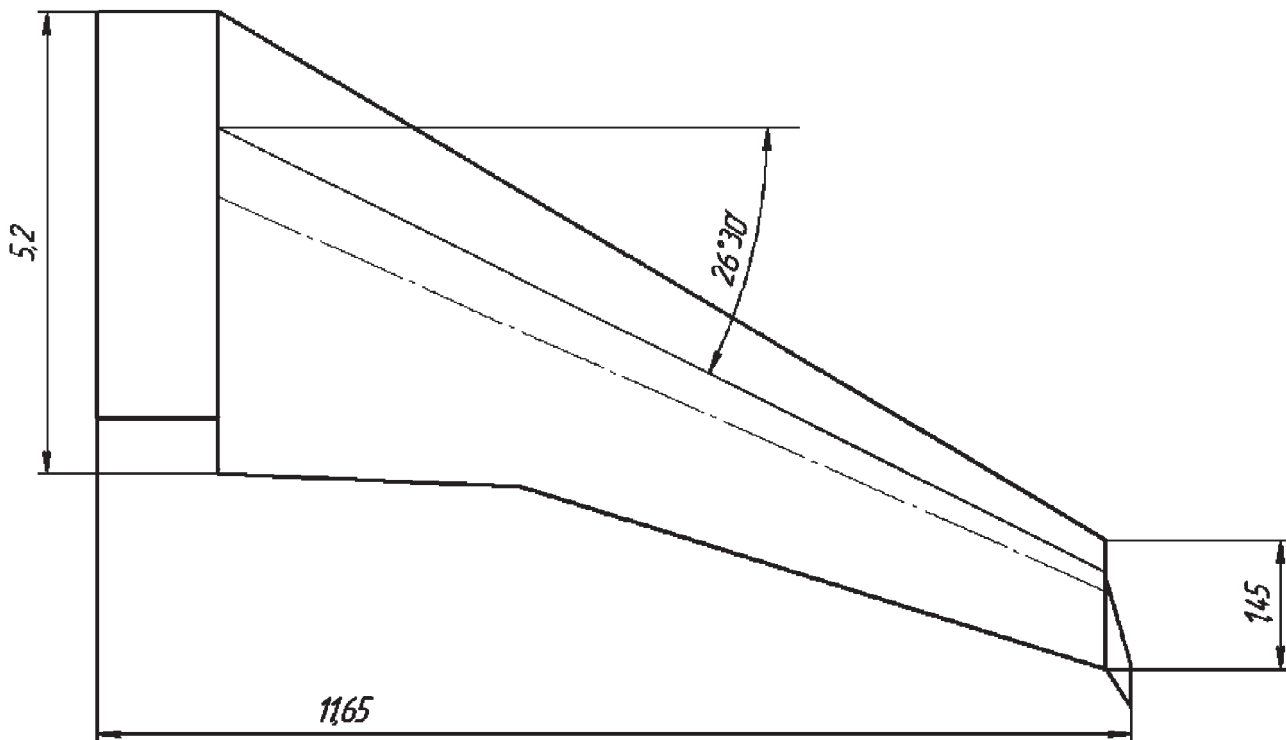


Рис. 56. Консоль крила літака CRJ-700

Погонна маса конструкції

$$m_{пк}(z) = \frac{m_k \cdot b(z)}{S_k} = \frac{1650 \cdot b(z)}{31,44} = 52,48 \cdot b(z),$$

де m_k – маса консолі, S_k – площа консолі.

Погонна маса палива:

$$m_{ппал}(z) = \frac{m_{пал} b(z)}{S_{кон}} = \frac{4410 \cdot b(z)}{31,44} = 140,267 \cdot b(z),$$

де $m_{пал}$ – маса палива в консолі.

Сумарна погонна маса

$$m_{п}(z) = m_{пк}(z) + m_{ппал}(z) = 52,48 b(z) + 140,267 b(z) = 192,747 \cdot b(z).$$

Визначимо згинальну жорсткість консолі. Зробимо припущення, що

$$EI(z) = EI(0) \left(1 - \frac{z}{l_k}\right),$$

де $EI(0)$ – згинальна жорсткість консолі в місці защемлення.

Задаємося першою згинальною формою коливань для консолі

$$f(z) = \frac{z^2}{2L_k} - \frac{z^3}{3L_k^2} + \frac{z^4}{12L_k^3}$$

і першою власною згинальною частотою (для даного типу літака)

$$f_{\text{вл } 1} = 2,4 \text{ Гц ,}$$

тоді колова частота власних коливань буде

$$\omega_{\text{вл } 1} = 2,4 \cdot 2\pi = 15.08 \text{ рад/с .}$$

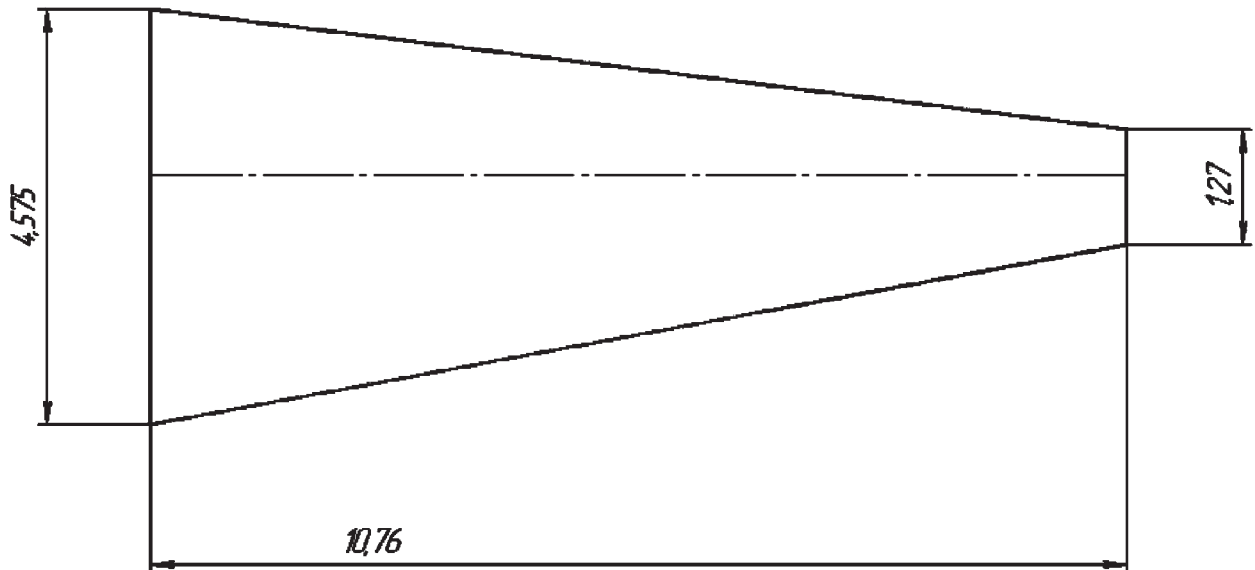


Рис. 57. Спрямлена консоль крила літака

З формули Релея виразимо згинальну жорсткість у защемленні $EI(0)$ через $\omega_{\text{вл } 1}$:

$$EI(0) = \frac{\omega_{\text{вл } 1}^2 \int_0^{L_k} m(z) f^2 dz + \sum_1^k m_i f_i^2}{\int_0^{L_k} (1 - \frac{z}{L_k}) (f'')^2 dz} .$$

У результаті

$$EI(0) = \frac{15.08^2 \int_0^{10,76} 192.747 \cdot b(z) \cdot f^2 dz + 824.18 \cdot f_i^2}{\int_0^{10,76} (1 - \frac{z}{10.76}) (f'')^2 dz} = 1.088 \cdot 10^8 \text{ Нм}^2 .$$

Висновки

Проведено оцінювання згинальної жорсткості консолі крила на основі статистичних даних щодо її масових характеристик і першої згинальної частоти власних коливань. Метод Релея дозволяє отримати точний результат, якщо задано точну форму коливань і точні залежності розподілу мас і жорсткості по довжині. У даному розрахунку прийнята форма задовольняє як геометричні, так і силові початкові умови. Отриманий результат буде використаний при виконанні наступних завдань.

Завдання № 4

Вільні та вимушені коливання консолі крила з двома степенями вільності

Одне з актуальних завдань динамічної аеропружності ЛА – визначення динамічних характеристик конструкції (частот і форм власних коливань) та навантаження літака від дії динамічних навантажень.

Динамічні процеси, що відбуваються в конструкції, можуть призвести до руйнування конструкції внаслідок великих одноразових перевантажень або в результаті дії впродовж певного часу відносно невеликих навантажень і накопичення від цього пошкоджень. В окремих випадках через деформацію конструкції можуть виникати порушення в нормальній роботі різних систем і обладнання. Крім того, інтенсивні вібрації шкідливі для організму екіпажу та пасажирів.

Динамічні задачі аеропружності вирішують, як правило, в два етапи [8]. На першому, допоміжному етапі визначають форми і частоти власних коливань конструкції; на другому вирішують основне завдання – визначають рух і навантаження пружної системи. Як узагальнені координатні функції (степені вільності пружної конструкції) використовують знайдені на першому етапі форми й частоти власних коливань.

Під динамічними розуміють навантаження, в утворенні яких крім зовнішніх сил беруть участь сили, зумовлені прискоренням рухом і пружними коливаннями конструкції. Динамічне навантаження зазвичай виникає при польоті в турбулентній атмосфері, посадці і пробігу по нерівному аеродрому, дисбалансі мас двигуна, наприклад, при втраті лопатки компресора чи турбіни. На військових літаках динамічне навантаження виникає при інтенсивному просторовому маневруванні, дії ударної хвилі вибуху, стрільбі з стрілецько-гарматного озброєння, катапультуванні і т. ін.

Вимоги про обов'язковість проведення динамічного аналізу навантаження від поривів і при посадці важких літаків записані в нормативних документах. При цьому розробникам АТ доводиться визначати (експериментальним чи розрахунковим шляхом) не тільки екстремальні динамічні навантаження для перевірки статичної міцності, але і їх повторюваність для визначення ресурсу конструкції утомної міцності).

На рис. 58 показано зміну перевантаження в центрі мас літака типу Ан-225 на посадці при штатній вертикальній швидкості $V_y = 2,7 \text{ м/с}$ [5].

Максимальне значення перевантаження ЛА досягається в момент дотику ЗПС стояками другого ряду в момент $t = 0,5$ с.

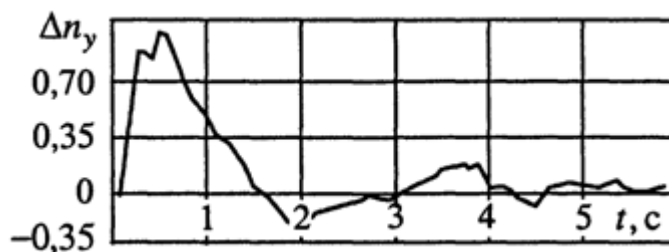


Рис. 58. Зміна перевантаження в центрі мас літака типу Ан-225 при посадці

Як бачимо, конструкція зазнає дію значних змінних перевантажень внаслідок прискорень у центрі мас літака. Змінні сили викликають вертикальні переміщення всього ЛА. Крім того, в конструкції крила, фюзеляжу та інших частин збуджуються інтенсивні пружні коливання в широкому частотному спектрі. Виникають додаткові небезпечні сили інерції.

Для забезпечення міцності і ресурсу конструкції літака актуальним є вивчення його динамічної реакції при посадці і оцінювання навантаження конструкції.

Мета завдання – записати рівняння вільних і вимушених коливань консолі крила як системи з двома степенями вільності, визначити динамічні характеристики консолі (частоти та форми власних згинальних коливань) і відклик конструкції на задане експлуатаційне збурення при посадці.

Для цього необхідно:

- отримати рівняння руху консолі крила як системи з двома степенями вільності;
- знайти динамічні характеристики консолі – форми і частоти власних коливань;
- визначити динамічну реакцію системи з двома степенями вільності на задане збурення;
- застосувати метод заданих форм при визначенні динамічної реакції системи;
- знайти амплітудно-частотну характеристику системи.

Теоретичні положення і методичні вказівки до виконання домашнього завдання

Припущення і гіпотези

- розрахункова схема консолі крила зведена до системи з двома степенями вільності – враховуються вертикальні переміщення мас;

- використовується метод дискретизації – розподілені маси консолі (маса конструкції крила, палива, двигунів, тощо) зводяться до двох дискретних мас, зосереджені маси розташовані на осі жорсткості;
- консоль крила має певну згинальну жорсткість, розподілену вздовж розмаху за статистикою. Для її оцінки застосований метод Релея;
- защемлення крила до фюзеляжу вважається нерухомим;
- розглядають малі коливання системи. Вважають, що матеріал конструкції знаходиться в лінійно-пружній області; система вважається лінійною і справедливий принцип незалежності дії сил.

Вільні згинальні коливання консолі крила

Визначимо власні частоти і форми коливань консолі крила як системи з декількома степенями вільності. Така спрощена розрахункова схема ЛА дозволяє спростити викладки і зрозуміти основні підходи щодо формування ММ динамічних явищ та їх фізичні закономірності.

Знання динамічних характеристик конструкції (форм і частот власних коливань) дозволяє застосувати на практиці зручний і розповсюджений спосіб дослідження динаміки конструкції – метод заданих форм.

Розглянемо невагому консоль крила, до якої прикріплено дві зосереджені маси (рис. 59). Розподілену масу консолі крила можна навести у вигляді двох зосереджених мас m_1 і m_2 :

$$m_1 + m_2 = \int_0^{l_k} m_n(z) dz,$$

де $m_n(z)$ – погонна маса консолі.

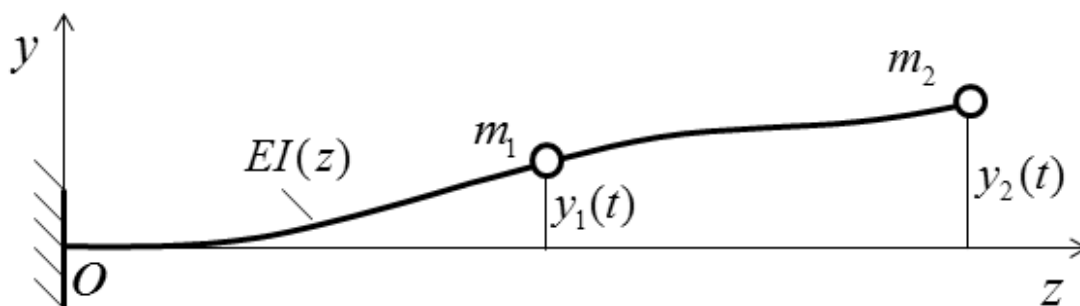


Рис. 59. Згинальні коливання консолі крила

Уявімо крило у вигляді балки з відомою згинальною жорсткістю $EI(z)$ вздовж розмаху. Вважаємо, що зосереджені маси m_1 і m_2 розташовані на осі жорсткості і викликають тільки вигин у процесі поперечних коливань консолі. Отже, розглядаємо ізольовані згинальні коливання. Така система

має два степені вільності. Як узагальнені координати приймемо вертикальні зміщення мас y_1 і y_2 (рис. 59).

При вільних коливаннях зовнішні сили на крило не діють, коливання відбуваються під дією пружних та інерційних сил. Сили інерції мас діють на балку, а сили пружності з боку балки – на дискретні маси.

Запишемо рівняння вільних коливань консолі крила на основі рівнянь руху, складених у зворотній формі [3]. Для цього до пружного безмасового «скелета» – консолі крила (рис. 60) прикладемо зосереджені масові сили (сили інерції)

$$F_{ін1} = -m_1\ddot{y}_1, \quad F_{ін2} = -m_2\ddot{y}_2. \quad (121)$$

Знак мінус у формулах указує, що сили інерції спрямовані протилежно прискоренню мас.

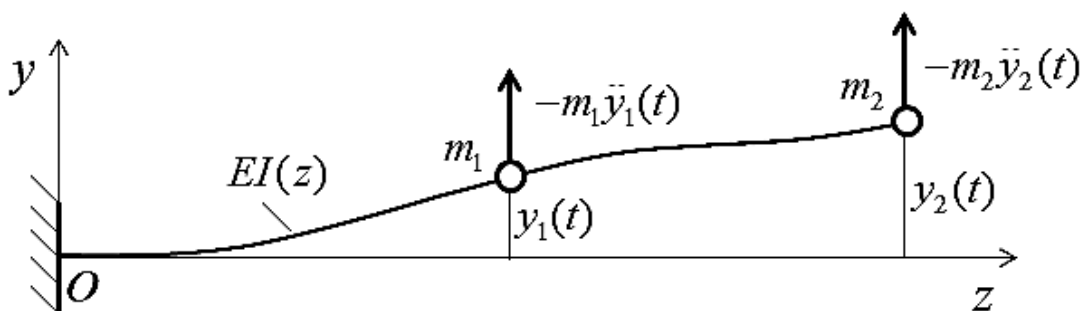


Рис. 60. Сили, що діють на пружну балку

Під дією цих сил балка пружньо деформується. Вважаємо, що конструкція веде себе як лінійна при навантаженні і справедливим є принцип суперпозиції. Пружні переміщення мас лінійно деформованої системи залежать від кожної з діючих сил:

$$\begin{aligned} y_1 &= F_{ін1}\delta_{11} + F_{ін2}\delta_{12}, \\ y_2 &= F_{ін1}\delta_{21} + F_{ін2}\delta_{22}, \end{aligned} \quad (122)$$

де δ_{ij} ($i, j = 1, 2$) – коефіцієнти піддатливості (переміщення в i -й точці від дії одиничної сили, прикладеної в точці j). Після підстановки співвідношень (121) в рівняння (122) отримаємо диференціальні рівняння руху системи, які записані в зворотній формі:

$$\begin{aligned} y_1 &= -m_1\ddot{y}_1\delta_{11} - m_2\ddot{y}_2\delta_{12}, \\ y_2 &= -m_1\ddot{y}_1\delta_{21} - m_2\ddot{y}_2\delta_{22}. \end{aligned} \quad (123)$$

Визначимо коефіцієнти піддатливості за допомогою інтеграла Мора

$$\delta_{ij} = \int_0^{l_k} \frac{M_i(z) M_j(z)}{EI} dz, \quad i, j = 1 \dots 2,$$

де $M_i(z)$ і $M_j(z)$ – згинальні моменти в перерізах балки від дії одиничних сил (рис. 61):

$$M_1(z) = \left(\frac{l_k}{2} - z\right) \text{ при } z \leq \frac{l_k}{2};$$

$$M_2(z) = l_k - z.$$

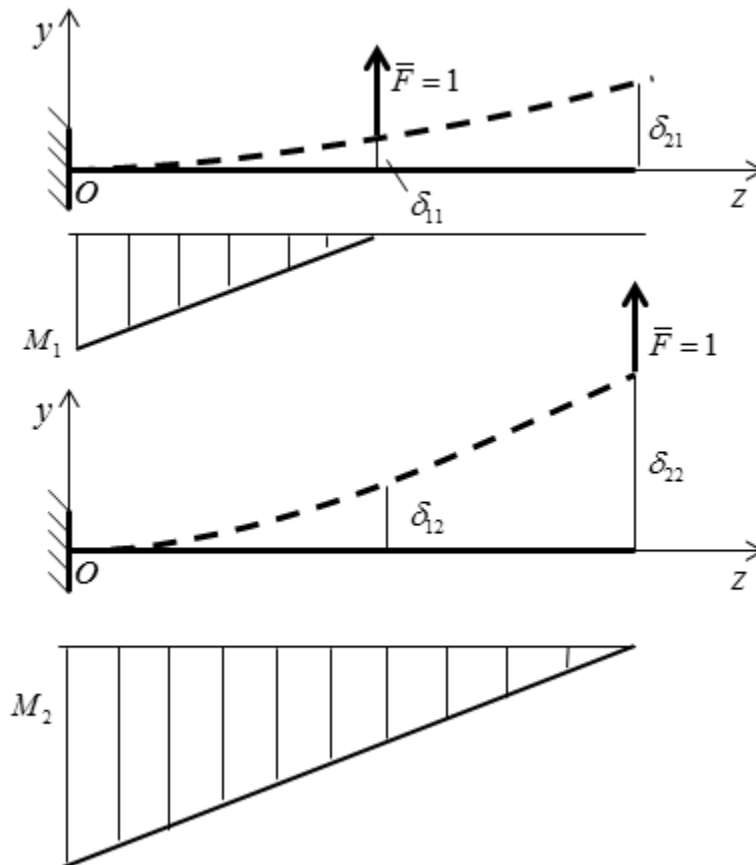


Рис. 61. Епюри згинальних моментів від дії одиничних сил

Диференціальні рівняння руху (123) описують вільні коливання консолі. Рішення системи знаходимо у вигляді

$$\begin{aligned} y_1(t) &= A_1 \sin(\omega_{вн} t + \varphi), \\ y_2(t) &= A_2 \sin(\omega_{вн} t + \varphi), \end{aligned} \quad (124)$$

де A_1 і A_2 – амплітуди мас при їх коливаннях; $\omega_{вн}$ – колова частота власних коливань.

Очевидно, що

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 &= -A_1 \omega_{\text{вл}}^2 \sin(\omega_{\text{вл}} t + \varphi), \\ \ddot{y}_2 &= -A_2 \omega_{\text{вл}}^2 \sin(\omega_{\text{вл}} t + \varphi).\end{aligned}$$

З (123) отримаємо співвідношення для амплітуд вільних коливань:

$$\begin{aligned}A_1 &= m_1 A_1 \delta_{11} \omega_{\text{вл}}^2 + m_2 A_2 \delta_{12} \omega_{\text{вл}}^2, \\ A_2 &= m_1 A_1 \delta_{21} \omega_{\text{вл}}^2 + m_2 A_2 \delta_{22} \omega_{\text{вл}}^2,\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}A_1(m_1 \delta_{11} \omega_{\text{вл}}^2 - 1) + A_2(m_2 \delta_{12} \omega_{\text{вл}}^2) &= 0, \\ A_1(m_1 \delta_{21} \omega_{\text{вл}}^2) + A_2(m_2 \delta_{22} \omega_{\text{вл}}^2 - 1) &= 0.\end{aligned}\tag{125}$$

Система лінійних однорідних рівнянь (125) відносно A_1 і A_2 має ненульове рішення за умови, якщо визначник, складений з коефіцієнтів при амплітудах, дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} m_1 \delta_{11} \omega_{\text{вл}}^2 - 1 & m_2 \delta_{12} \omega_{\text{вл}}^2 \\ m_1 \delta_{21} \omega_{\text{вл}}^2 & m_2 \delta_{22} \omega_{\text{вл}}^2 - 1 \end{vmatrix} = 0.\tag{126}$$

Рівняння (126) називається частотним, оскільки дозволяє знайти два значення власної частоти коливань – $\omega_{\text{вл}1}$ і $\omega_{\text{вл}2}$. Відзначимо, що $\omega_{\text{вл}1} < \omega_{\text{вл}2}$. Підставивши ці частоти, наприклад, у перше рівняння системи (125), отримаємо шукані співвідношення для амплітуд.

При частоті $\omega_{\text{вл}1}$ значення амплітуди коливань у точці 1 при нормованому відхиленні точки 2 (дорівнює одиниці – $A_{21} = 1$), таке:

$$A_{11} = \frac{m_2 \delta_{12} \omega_{\text{вл}1}^2}{1 - m_1 \delta_{11} \omega_{\text{вл}1}^2},$$

а при $\omega_{\text{вл}2}$

$$A_{12} = \frac{m_2 \delta_{12} \omega_{\text{вл}2}^2}{1 - m_1 \delta_{11} \omega_{\text{вл}2}^2}.$$

На рис. 62 показані нормовані форми коливань, які відповідають першій та другій власним частотам.

При коливаннях консолі з першою власною частотою $\omega_{\text{вл}1}$ обидві маси рухаються в одну сторону. Коливання консолі з другою власною частотою $\omega_{\text{вл}2}$ характеризуються наявністю нерухомої точки на балці – так званого вузла. Маса в будь-який момент часу рухається в різні боки і одночасно проходять положення рівноваги.

Колівальний процес у системі, як правило, відбувається одночасно з двома частотами $\omega_{\text{вл}1}$ і $\omega_{\text{вл}2}$ власних коливань. Тільки при спеціально підібраних початкових збуреннях можуть відбуватися коливання з однією частотою.

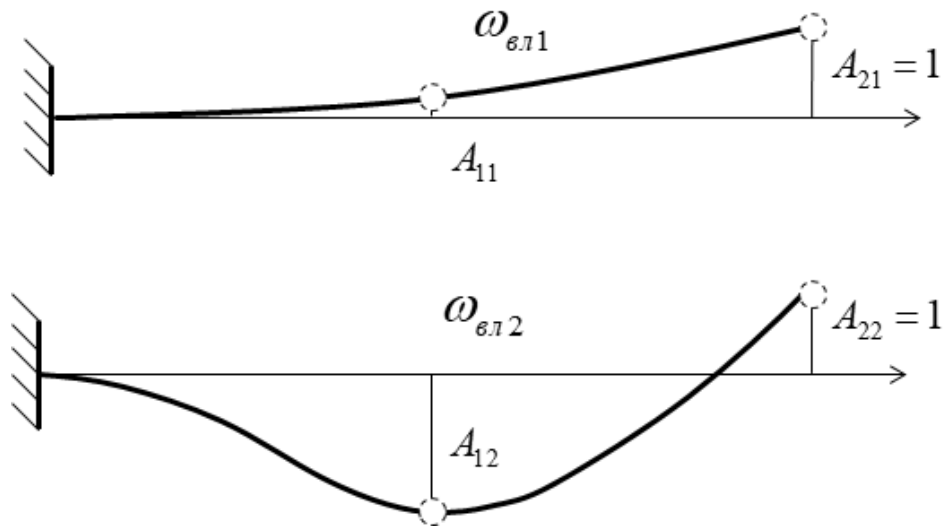


Рис. 62. Форми власних коливань консолі крила

Загальне рішення системи рівнянь (125) має містити обидві гармоніки, тому запишемо рішення у вигляді

$$\begin{aligned} y_1 &= A_{11} \sin(\omega_{\text{вл}1} t + \varphi_1) + A_{12} \sin(\omega_{\text{вл}2} t + \varphi_2); \\ y_2 &= A_{21} \sin(\omega_{\text{вл}1} t + \varphi_1) + A_{22} \sin(\omega_{\text{вл}1} t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (127)$$

Отримаємо рівняння вільних коливань консолі на основі рівнянь руху в *прямій формі* (рис. 63). Для цього необхідно звільнити маси, приклавши до них реакції відкинутих зв'язків – дію сил пружності з боку деформованої балки.

Позначимо через F_1 і F_2 сили, які необхідно прикласти до балки, щоб отримати її переміщення y_1 і y_2 . Тоді сили пружності, що діють на маси, такі ж за величиною, але протилежні за напрямком. Вони залежать від переміщень y_1 і y_2 :

$$F_{\text{пр}1}(t) = -F_1 = f_1(y_1, y_2); \quad F_{\text{пр}2}(t) = -F_2 = f_2(y_1, y_2).$$

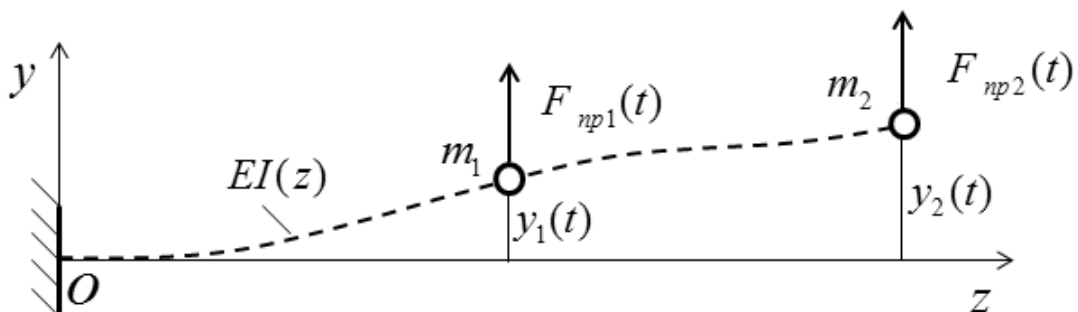


Рис. 63. Сили, що діють на зосереджені маси

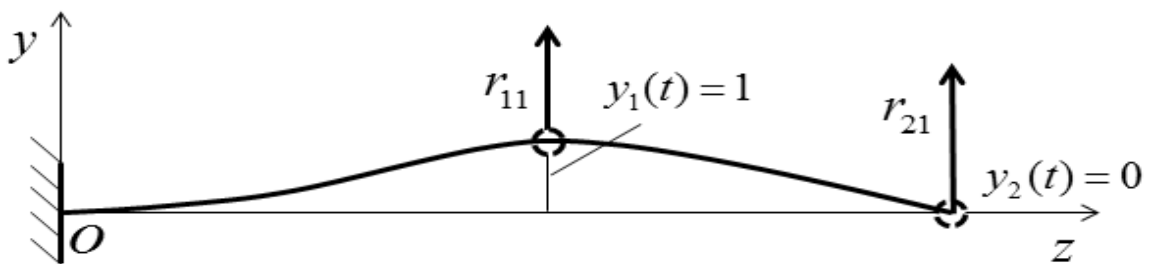
З огляду на лінійність системи функції f_1 і f_2 – лінійні.

Розглянемо два стани системи (рис. 64). На рис. 64, а показані одиничні реакції (коефіцієнти жорсткості), необхідні для створення одиничного переміщення маси 1 за відсутності переміщення маси 2, а на рис. 64, б – одиничні реакції (коефіцієнти жорсткості) для створення одиничного переміщення маси 2 за відсутності переміщення маси 1.

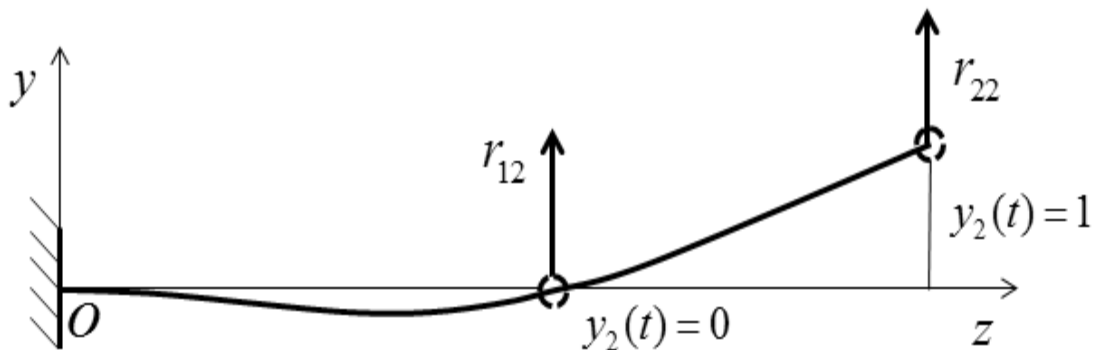
Збільшимо сили r_{11} і r_{21} в y_1 раз, а сили r_{12} і r_{22} – в y_2 . Очевидно, що при накладенні цих навантажень балка буде навантажена силами (рис. 65)

$$F_1 = r_{11}y_1 + r_{12}y_2;$$

$$F_2 = r_{21}y_1 + r_{22}y_2.$$



а



б

Рис. 64. Визначення коефіцієнтів жорсткості системи

Рівняння руху мас, що викликані силами $F_{пр1}$ і $F_{пр2}$, набувають вигляду

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 &= -r_{11}y_1 - r_{12}y_2; \\ m_2 \ddot{y}_2 &= -r_{21}y_1 - r_{22}y_2, \end{aligned} \quad (128)$$

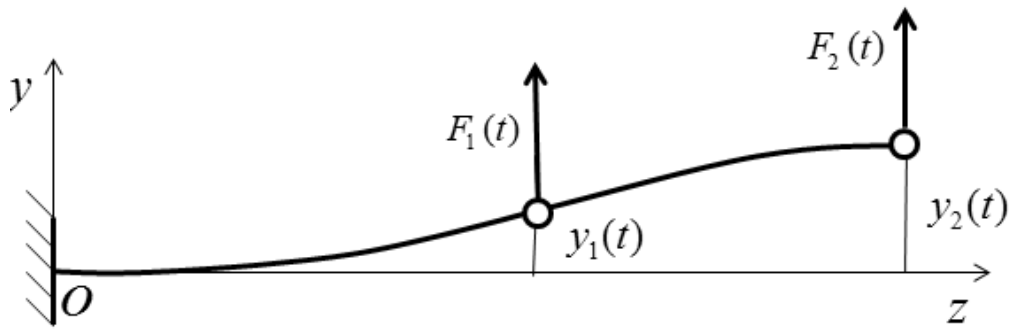


Рис. 65 . Сили, необхідні для деформування системи

Система рівнянь (128) отримана на основі прямого методу, вона допускає безпосереднє числове інтегрування. Проте отримати коефіцієнти жорсткості складніше, ніж обчислити коефіцієнти піддатливості. Із системи диференціальних рівнянь вільних коливань (128) визначають частоти і форми власних коливань.

Матричний спосіб вирішення рівнянь руху

Скористаємося матричним підходом. Введемо позначення для матриць:

– діагональної матриці мас

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix};$$

– вектора - стовпця пружних переміщень

$$Y = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix};$$

– вектора - стовпця лінійних прискорень мас

$$\ddot{Y} = \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix};$$

– квадратної симетричної матриці піддатливості

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix},$$

де $\delta_{12} = \delta_{21}$ – згідно з теоремою про взаємність переміщень;

– квадратної симетричної матриці жорсткості

$$r = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix},$$

де $r_{12} = r_{21}$ – згідно з теоремою про взаємність реакцій.

Очевидно, що систему (125), яка записана на основі зворотного способу, можна уявити в матричних позначеннях у вигляді

$$Y = -\delta M \ddot{Y}.$$

При гармонічному русі, як впливає з (124),

$$\ddot{Y} = -\omega_{вл}^2 Y.$$

Тоді

$$Y = \omega_{вл}^2 \delta M Y. \quad (129)$$

Позначивши результат перемноження матриць піддатливості і мас

$$B = \delta M,$$

одержимо рівняння

$$BY = \frac{1}{\omega_{вл}^2} Y,$$

де

$$\lambda = \frac{1}{\omega_{вл}^2}. \quad (130)$$

З лінійної алгебри відомо, що якщо для матриці B після множення на вектор - стовпець Y виконується співвідношення

$$BY = \lambda Y,$$

то λ є власним значенням для матриці B , а сама матриця B є власним вектором (формою власних коливань).

Частота власних коливань з урахуванням (130)

$$\omega_{вл} = \sqrt{\frac{1}{\lambda}}. \quad (131)$$

Співвідношення (128), яке записано на основі прямого методу, можна уявити в матричних позначеннях у вигляді

$$M \ddot{Y} = -r Y. \quad (132)$$

Помножимо (132) зліва на матрицю δ :

$$\delta M \ddot{Y} = -\delta r Y.$$

Оскільки

$$Y = -\delta M \ddot{Y},$$

то добуток матриць піддатливості і жорсткості

$$\delta r = E, \quad (133)$$

де одинична матриця

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, матриці δ і r – зворотні:

$$\delta = r^{-1}, \quad r = \delta^{-1}. \quad (134)$$

Зворотний спосіб запису рівнянь руху швидше приводить до мети, оскільки рівняння (132) можна вирішувати числовим методом. При цьому матрицю r отримують як зворотну до матриці δ .

Для безпосереднього підрахунку коефіцієнтів r для балки з двома масами необхідно двічі вирішити один раз статично невизначену систему. Звичайно легше визначити матрицю δ , а потім знайти матрицю r .

Вимушені коливання консолі крила з двома степенями вільності

Вимушені коливання консолі відбуваються під дією збурювальних сил $F_{B1}(t)$ і $F_{B2}(t)$ (рис. 66 і 67).

Отримаємо рівняння на основі прямого способу. На маси (рис. 66) діють сили пружності F_{np1} і F_{np2} з боку балки і зовнішні збурювальні сили $F_{B1}(t)$ ($i = 1, 2$). Запишемо рівняння руху для окремих мас:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 &= -r_{11}y_1 - r_{12}y_2 + F_{B1}(t); \\ m_2 \ddot{y}_2 &= -r_{21}y_1 - r_{22}y_2 + F_{B2}(t). \end{aligned} \quad (135)$$

Система рівнянь (135) допускає безпосереднє числове інтегрування на ЕОМ, оскільки кожне рівняння містить лише одну вищу похідну.

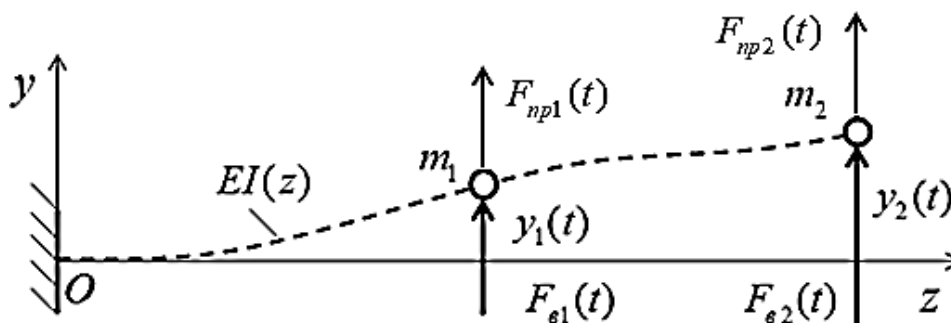


Рис. 66 . Прямий спосіб складання рівнянь руху

У матричних позначеннях, які введені вище, система (135) має вигляд

$$m\ddot{Y} + rY = F_e, \quad (136)$$

де F_e – вектор-стовпець зовнішніх сил $F_e = \begin{Bmatrix} F_{e1} \\ F_{e2} \end{Bmatrix}$.

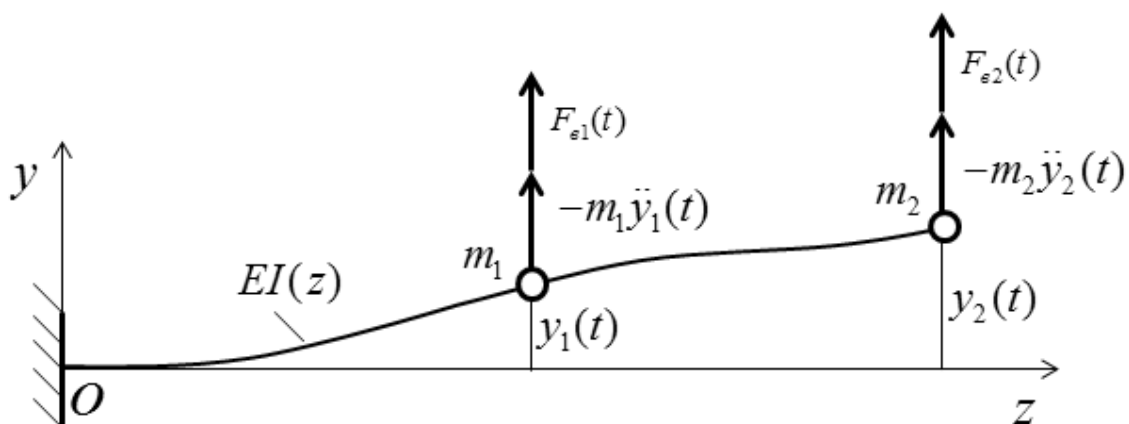


Рис. 67. Зворотний спосіб складання рівнянь руху

Амплітудно-частотна характеристика системи

Розглянемо систему (рис. 66), що збуджується гармонічною силою $F_{\epsilon 1} = F_1 \sin \omega_g t$, яка діє в точці 1. Очевидно, що в системі з часом встановлюються сталі коливання з частотою збудження. Визначимо амплітудні зміщення мас – Y_1 і Y_2 .

У матричному вигляді рівняння вимушених коливань (136) набуває вигляду

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \sin \omega_g t. \quad (137)$$

У системі демпфірування відсутнє, тому переміщення точок (рішення системи) може бути наведено так:

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix} \sin \omega_g t. \quad (138)$$

Підставляючи (138) в (137), одержуємо

$$\begin{bmatrix} r_{11} - m_1 \omega_g^2 & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} - m_2 \omega_g^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (139)$$

або, позначаючи матрицю

$$[Z(\omega_g)] = \begin{bmatrix} r_{11} - m_1 \omega_g^2 & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} - m_2 \omega_g^2 \end{bmatrix},$$

отримаємо

$$[Z(\omega_g)] \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Помноживши на обернену матрицю $[Z(\omega_g)]^{-1}$, знайдемо рішення на дію гармонічної сили

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{|Z(\omega_g)|} \begin{bmatrix} r_{22} - m_2 \omega_g^2 & -r_{12} \\ -r_{21} & r_{11} - m_1 \omega_g^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (140)$$

де

$$|Z(\omega_g)| = m_1 m_2 (\omega_{gl1}^2 - \omega_g^2)(\omega_{gl2}^2 - \omega_g^2). \quad (141)$$

В рівнянні (141) ω_{gl1} і ω_{gl2} – частоти власних коливань. З (140) легко знайти амплітуди сталих вимушених коливань

$$Y_1 = \frac{(r_{22} - m_2 \omega_g^2) F_1}{m_1 m_2 (\omega_{gl1}^2 - \omega_g^2)(\omega_{gl2}^2 - \omega_g^2)}; \quad (142)$$

$$Y_2 = \frac{-r_{21} F_1}{m_1 m_2 (\omega_{gl1}^2 - \omega_g^2)(\omega_{gl2}^2 - \omega_g^2)}.$$

Для розуміння фізичних закономірностей та ілюстрації отриманих рівнянь для амплітуд (142) на рис. 68 показана зміна амплітуд двох мас залежно від частоти ω_g зовнішньої сили. При наближенні ω_g до першої або другої власних частот (у зоні першого та другого резонансу) сталі амплітуди коливань інтенсивно зростають до небезпечних значень.

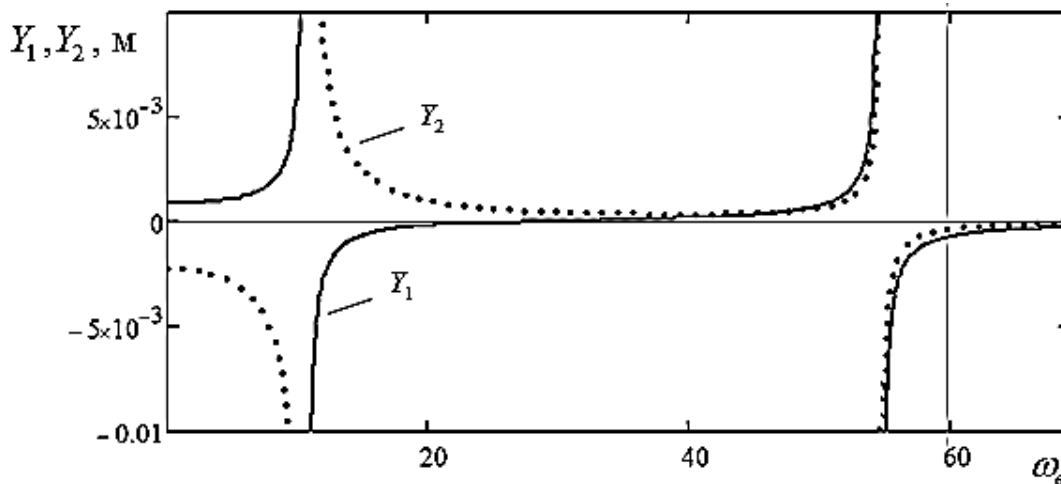


Рис. 68. Амплітудно-частотна характеристика системи

Відмітимо, що дані рис. 68 ілюструють ефект динамічного гасіння коливань. В інтервалі $\omega_{gl1} < \omega_g < \omega_{gl2}$ існує частота, при якій точка 1 стає нерухомою. Зовнішня сила, що прикладена до неї, у будь-який момент часу врівноважена силами інерції від маси 2.

Метод заданих форм. Розкладання руху системи за формами власних коливань

Значні переваги порівняно з прямим і зворотним методами розрахунку пружних переміщень має метод заданих форм. Суть методу полягає в тому, що шукані переміщення $y_k(t)$ виражаються через узагальнені координати $q_k(t)$ і відповідні їм ортогональні амплітуди власних коливань A_{ik} .

Введемо нові координати $q_k(t)$ так, щоб виконувалися співвідношення

$$y_i(t) = \sum_{k=1}^n q_k(t) A_{ik}, \quad (143)$$

де A_{ik} – амплітуди переміщень точок при $\omega = \omega_k$. Таке перетворення завжди можливе. Завдяки ортогональності власних форм кінетична і потенціальна енергії системи виражаються сумами енергій, відповідних кожній з головних координат. Тоді

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = M_k \dot{q}_k; \quad \frac{\partial T}{\partial q_k} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial q_k} = p_k^2 M_k q_k, \quad (144)$$

і рівняння руху в формі Лагранжа має вигляд

$$M_k \ddot{q}_k + p_k^2 M_k q_k = Q_k; \quad (145)$$

або

$$\ddot{q}_k + p_k^2 q_k = \frac{Q_k}{M_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (146)$$

Тут узагальнені сили Q_k являють собою віртуальну роботу всіх зовнішніх сил при одиничній варіації координати q_k ($q_k = 1$):

$$Q_k = \sum_{i=1}^n F_i A_{ik}, \quad (147)$$

де під знаком суми стоїть скалярний добуток сили на переміщення. Відзначимо, що сили F_i можуть залежати від q_k і \dot{q}_k .

Наведені вище рівняння динаміки ЛА були отримані в припущенні, що при коливаннях конструкції енергія не розсіюється. На практиці завжди відбувається загасання коливань, навіть у пустоті. Це пояснюється наявністю конструкційного демпфірування, яке складається з тертя в заклепках елементів і розсіювання енергії всередині матеріалу, тобто за наявності непружного опору матеріалу конструкції [2]. У цей час не існує

обґрунтованих і надійних методів розрахунку кількісних характеристик демпфірування. Зазвичай використовують наближений підхід, оснований на застосуванні гіпотези в'язкого тертя. Відповідно до цієї гіпотези демпфірувальні сили в конструкції вважають пропорційними швидкості пружних деформацій:

$$Q_d = -2M_k \chi_k p_k \dot{q}_k, \quad (148)$$

де χ_k – коефіцієнт конструкційного демпфірування діагональної матриці χ . Ці коефіцієнти визначають при випробуванні конструкції на різних режимах. Демпфірувальні сили не враховують при виведенні основних рівнянь і обчисленні частот і форм власних коливань реальної конструкції, а вводять в кінцеві вирази. Замість рівнянь (145) і (146) отримаємо систему диференціальних рівнянь пружних коливань крила або всього ЛА при дії нестационарного навантаження і сил демпфірування:

$$\ddot{q}_k + 2\chi_k p_k \dot{q}_k + p_k^2 q_k = \frac{Q_k}{M_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (149)$$

У співвідношеннях (149) немає ні інерційної, ні пружної взаємодії невідомих узагальнених координат q_k . Узагальнені сили Q_k обчислюють для відомих значень параметрів руху і деформування ЛА. Відмітимо, що рівняння (149) залежать одне від одного через узагальнені сили Q_k .

Приклад виконання завдання № 4.

Визначення частот і форм власних коливань консолі крила як системи з двома степенями вільності та динамічної реакції ЛА при ударі о землю

Вихідними даними є геометричні та масові параметри спрямленої консолі крила літака - прототипу.

Довжина консолі крила – $l_k = 16$ м. Нехай при посадці витрачено 50% палива і сумарна маса консолі становить

$$m_\Sigma = m_k + 0,5 \cdot m_{\text{пал}} = 5040 \text{ кг.}$$

Конструкцію крила з нескінченним числом степенів вільності уявімо у вигляді системи з двома зосередженими масами. Розрахункова схема такої системи – безмасова консольна балка з двома зосередженими масами. Величини мас дорівнюють

$$m_1 = 0,7 m_\Sigma, \quad m_2 = 0,3 m_\Sigma.$$

Маса m_1 розташована посередині консолі, а маса m_2 – на кінці крила.

Згинальна жорсткість консолі в місці защемлення знайдена вище методом Релея

$$EI(0) = 1.51 \cdot 10^8 \text{ Нм}^2.$$

Згинальну жорсткість консолі за розмахом вважаємо постійною.

Відоме вертикальне перевантаження ЛА в центрі мас при посадці (рис. 69). Прискорення літака при ударі спрямовано вгору і в довільний момент часу дорівнює

$$a_{y \text{ цм}} = n_y(t)g.$$

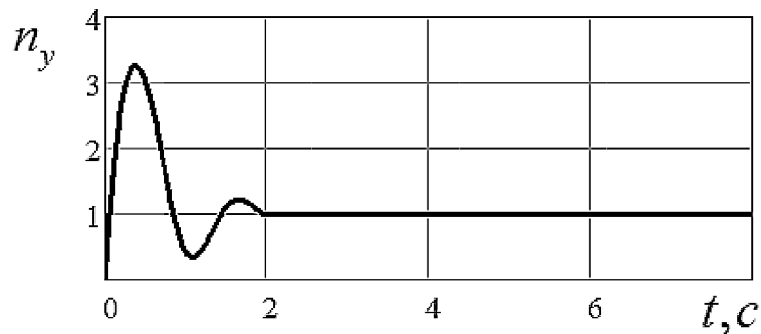


Рис. 69. Зміна вертикального перевантаження ЛА в центрі мас при ударі о землю

Визначення частот і форм власних коливань

Коефіцієнти піддатливості (переміщення від одиничної сили) дорівнюють

$$\delta_{11} = 1,22 \cdot 10^{-6} \text{ м}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = 3,05 \cdot 10^{-6} \text{ м}; \quad \delta_{22} = 9,75 \cdot 10^{-6} \text{ м}.$$

Матриця коефіцієнтів піддатливості і жорсткості відповідно дорівнюють

$$\delta = 10^{-6} \cdot \begin{bmatrix} 1,22 & 3,05 \\ 3,05 & 9,75 \end{bmatrix}, \text{ м};$$

$$r = \delta^{-1} = 10^6 \cdot \begin{bmatrix} 3,76 & -1,17 \\ -1,17 & 0,47 \end{bmatrix}, \text{ Н},$$

а матриця мас

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 3,53 & 0 \\ 0 & 1,51 \end{bmatrix}, \text{ кг}.$$

Матриця B

$$B = \delta M = \begin{bmatrix} 4,3 \cdot 10^{-3} & 4,61 \cdot 10^{-3} \\ 0,011 & 0,015 \end{bmatrix}$$

дозволяє знайти власні частоти і форми коливань із співвідношень

$$BY = (1/\omega^2)Y, \quad \lambda = 1/\omega^2,$$

де

$$Y = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}.$$

Власні значення матриці дорівнюють

$$\lambda = \begin{Bmatrix} 7,46 \cdot 10^{-4} \\ 0,019 \end{Bmatrix},$$

а частоти

$$f = \begin{Bmatrix} 1,18 \\ 5,78 \end{Bmatrix} \text{ Гц.}$$

Той же результат можна отримати, якщо розглянути частотне рівняння

$$F(\omega_c) = \begin{vmatrix} m_1 \delta_{11} \omega_c^2 - 1 & m_2 \delta_{12} \omega_c^2 \\ m_1 \delta_{21} \omega_c^2 & m_2 \delta_{22} \omega_c^2 - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

На рис. 70 показано графічне визначення коренів частотного рівняння.

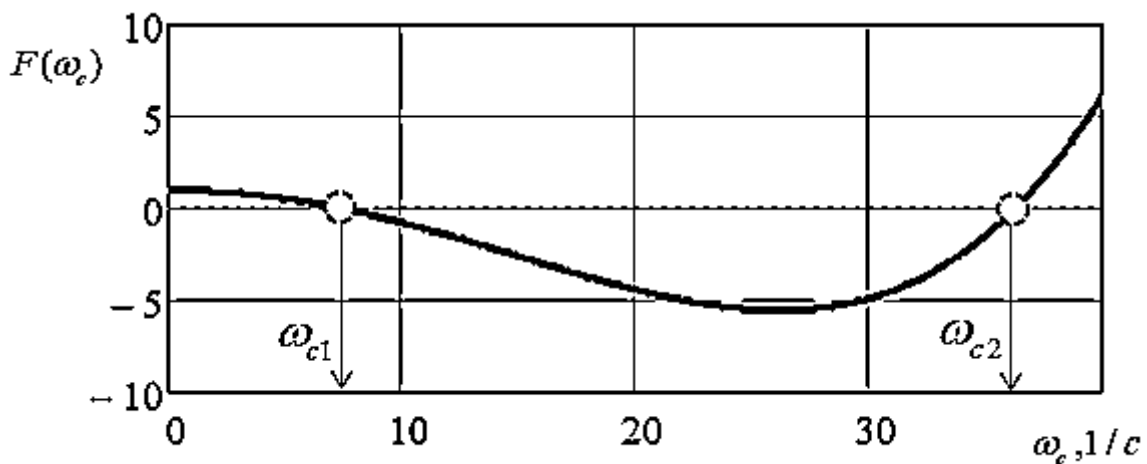


Рис. 70. Корені частотного рівняння

Форми власних згинальних коливань у вигляді відхилення двох мас показані на рис. 71. Вони нормовані так, що переміщення другої маси прийнято одиничним для першої $f_1(z)$ і другої $f_2(z)$ форм коливань.

Дослідимо динамічну реакцію консолі крила при ударі ЛА о землю на посадці (рис. 72). Будемо виходити з рівнянь

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 &= -r_{11}y_1 - r_{12}y_2 + F_{e1}(t), \\ m_2 \ddot{y}_2 &= -r_{21}y_1 - r_{22}y_2 + F_{e2}(t), \end{aligned}$$

де як зовнішні сили, що діють на маси, слід прикласти сили інерції переносного руху неінерціальної системи відліку, пов'язаної з центром мас ЛА

$$\vec{F}_{in\ i}(t) = -m_i \vec{a}_{цм}(t), \quad i = 1,2,$$

де $\vec{a}_{цм}(t)$ – вектор прискорення центру мас ЛА;

$\vec{F}_{in\ i}(t)$ – сила інерції, яка діє на i -у масу.

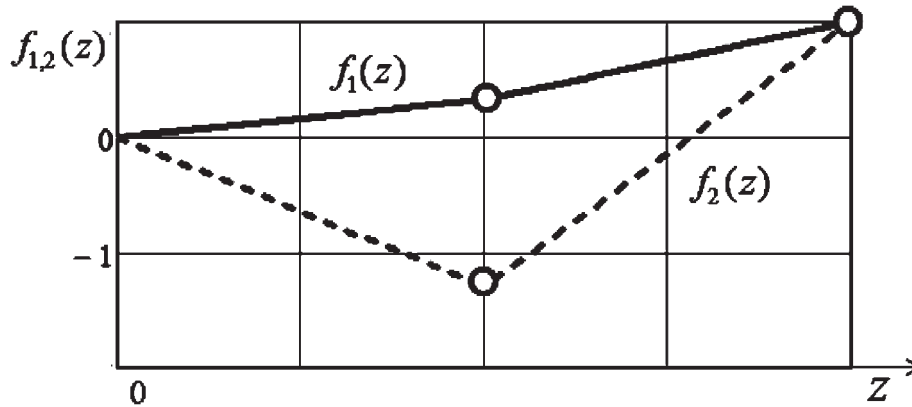


Рис. 71. Форми власних згинальних коливань консолі крила

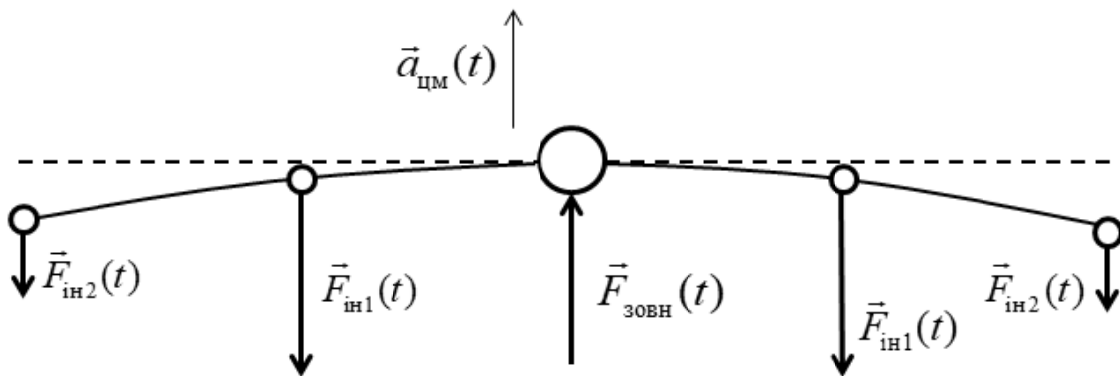


Рис. 72. Дія сил інерції на крило

Слід зазначити, що ми нехтуємо впливом збуреного руху крила на сили, що діють з боку шасі на ЛА. Згідно з методом заданих форм рівняння руху можна навести у вигляді

$$\ddot{q}_k + p_k^2 q_k = \frac{Q_k}{M_k} \quad (k = 1,2),$$

де узагальнена маса

$$M_k = \sum_{i=1}^2 m_i A_{ik}^2,$$

і узагальнена сила

$$Q_k = \sum_{i=1}^2 F_{B\ i} A_{ik},$$

є відомими.

Система диференціальних рівнянь вирішується чисельно в пакеті Mathcad. Вважаємо, що в момент часу $t = 0$ крило було нерухомим і недеформованим. Надалі в крилі збуджуються пружні коливання. Тертям у системі нехтуємо.

На рис. 73 показано зміну узагальнених координат $q_1(t)$ і $q_2(t)$. Як видно, пружні коливання за другою формою практично не відбуваються. Це пов'язано з характером зовнішнього впливу – сили інерції здійснюють роботу в основному на переміщеннях за першою формою. Крім того, час зростання зовнішніх сил є близьким до першої частоти власних коливань.

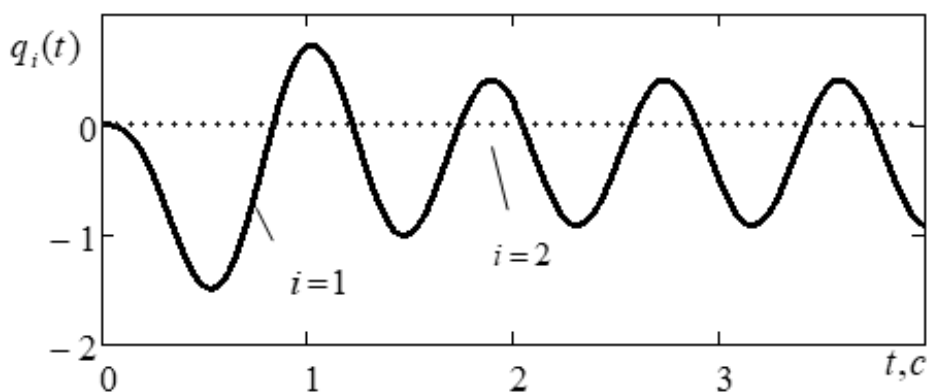


Рис. 73 . Зміна узагальнених координат $q_1(t)$ і $q_2(t)$ із часом

У той же час внесок узагальненого прискорення за другою формою в коливальний рух є помітним (рис. 74). Видно, що узагальнені координати в основному змінюються з частотами власних коливань.

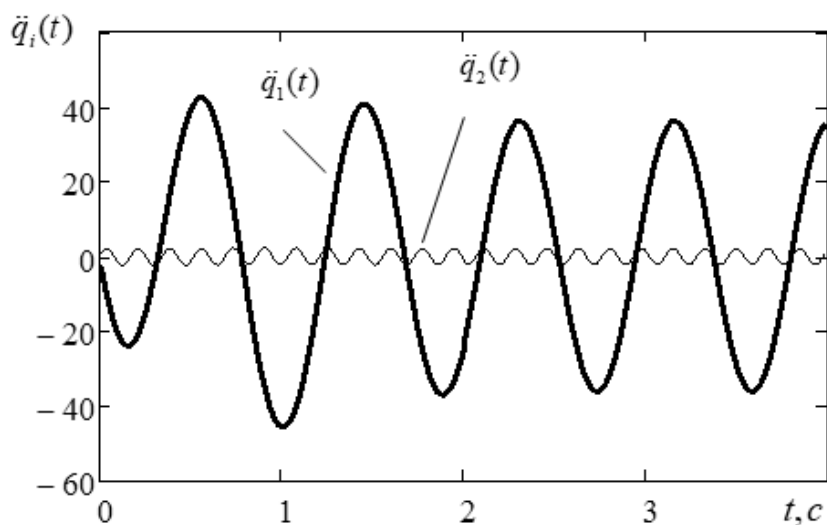


Рис. 74. Зміна узагальнених прискорень $\ddot{q}_1(t)$ і $\ddot{q}_2(t)$ із часом

На рис. 75 показано зміщення за часом двох мас відносно стану рівноваги.

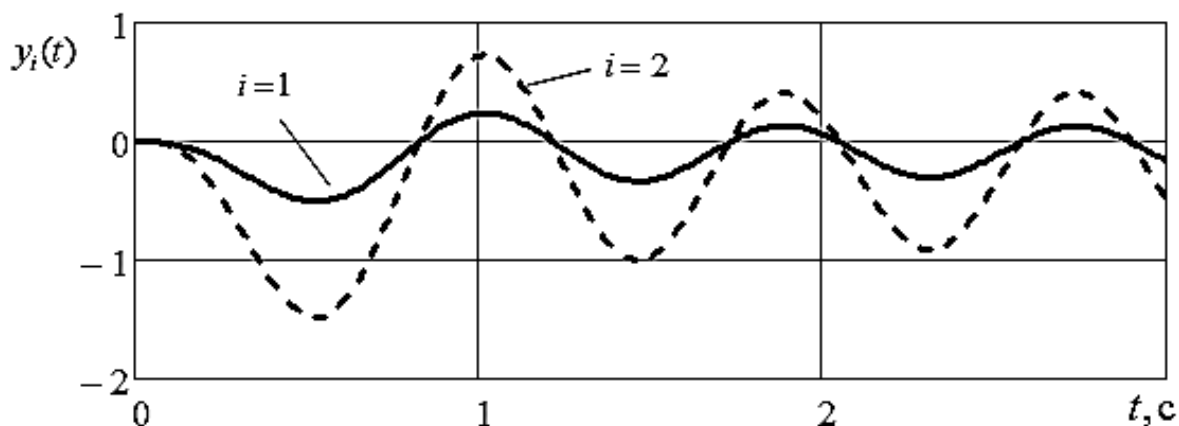


Рис. 75. Вертикальне переміщення точок крила при ударі

Як видно, в початковий момент часу деформації крила найбільші, а потім, після припинення дії перевантаження, в конструкції збуджуються пружні коливання меншої амплітуди.

Швидкість пружних деформацій при ударі змінюється згідно з рис. 76.

Важливою інформацією щодо навантаження крила є перевантаження в точках крила

$$n_i = a_i/g,$$

оскільки воно визначає навантаженість конструкції.

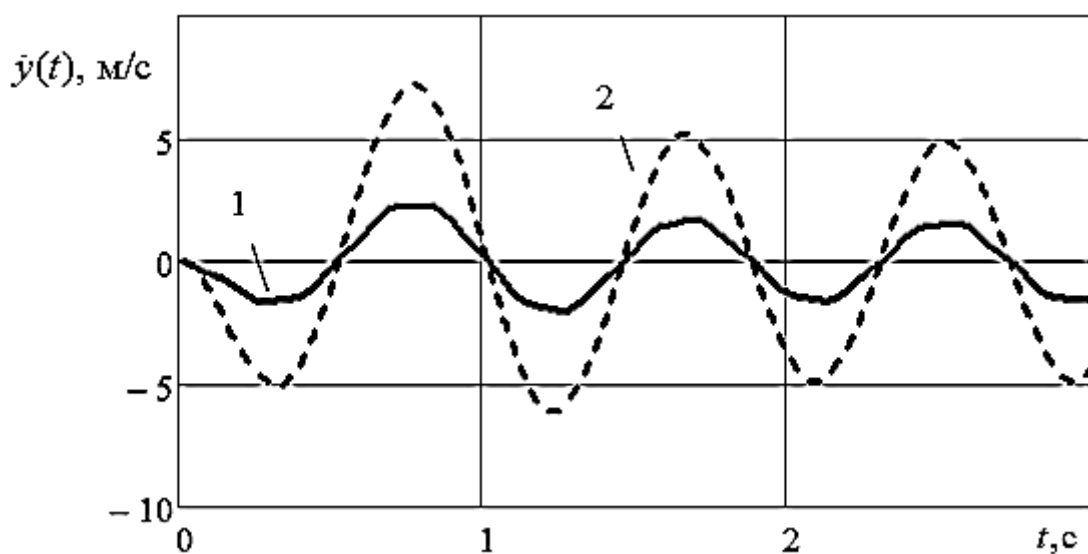


Рис. 76. Швидкість пружних деформацій крила

На рис. 77 показані закони зміни перевантаження з часом після удару ЛА о землю.

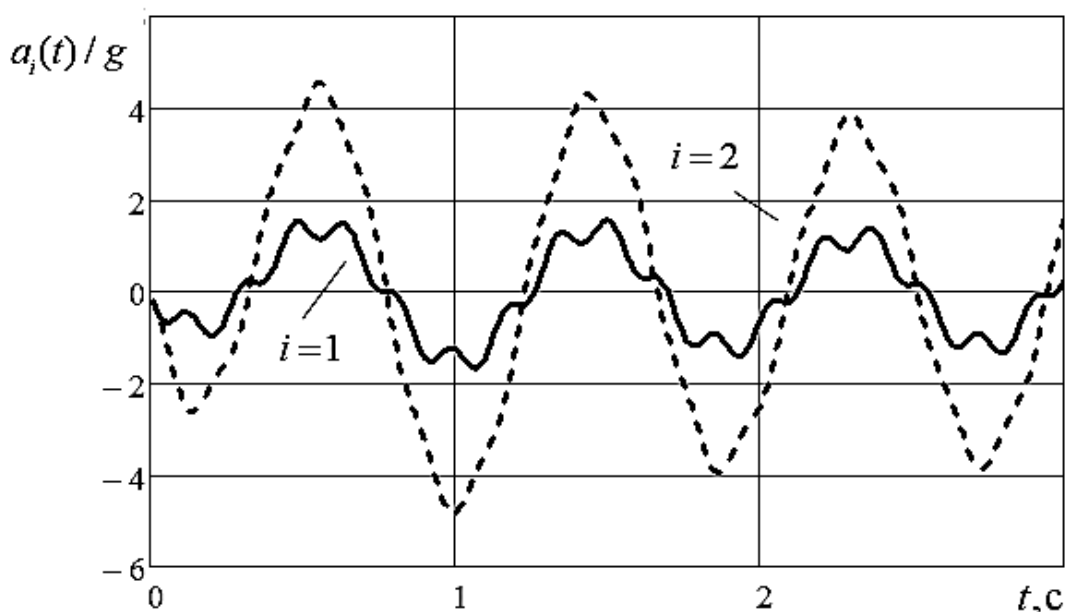


Рис. 77. Зміна перевантаження на крилі в часі після удару о землю

Поперечна сила на двох ділянках крила виникає від дії з боку мас сил інерції, пов'язаних із прискореним рухом всього літака і прискоренням від пружних коливань (рис. 78)

$$F_1(t) = -(\ddot{y}_1 + n_y(t)g)m_1,$$

$$F_2(t) = -(\ddot{y}_2 + n_y(t)g)m_2.$$

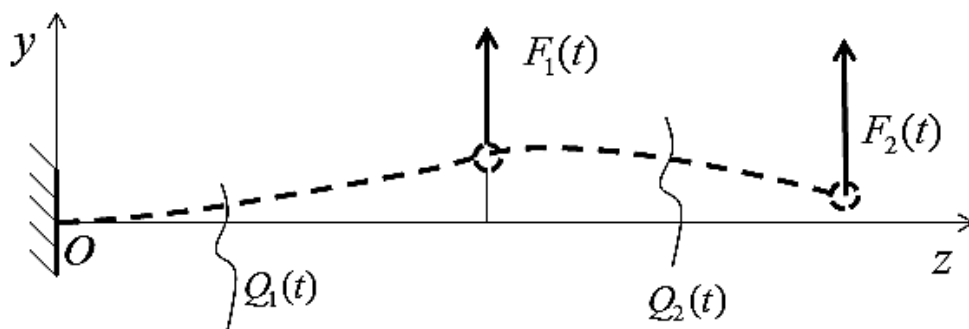


Рис. 78. Поперечна сила на двох ділянках крила

Зміну поперечної сили на ділянках крила показано на рис. 79. Тут же наведені статичні значення поперечної сили на стоянці ЛА. Як видно, має місце значне динамічне довантаження крила при посадці і ударі.

Висновки: реакція пружної конструкції ЛА при посадці залежить від власних динамічних характеристик конструкції (частот і форм власних коливань) і виду зовнішнього впливу.

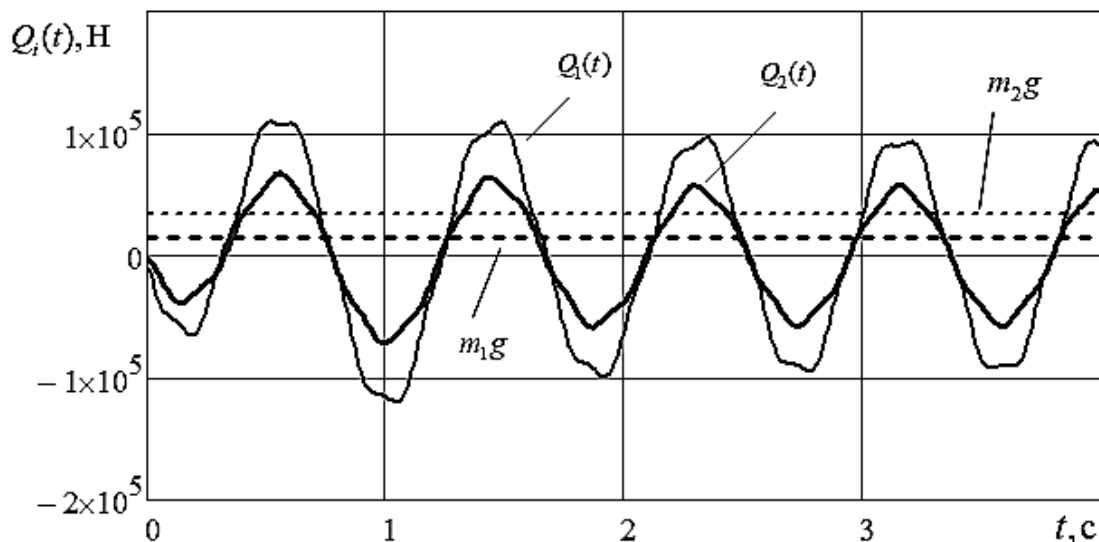


Рис. 79. Зміна поперечної сили на ділянках крила при ударі

При дослідженні динамічної реакції конструкції слід утримувати кілька нижчих тонів пружних коливань, а в разі високочастотного зовнішнього впливу – більшу кількість власних форм. З аналізу наведених даних видно, що дослідження міцності конструкції потрібно проводити з урахуванням пружності конструкції.

Завдання № 5

Власні коливання вільного ЛА з декількома степенями вільності

Літак являє собою єдину пружну систему, і всі його частини коливаються спільно. Крило, фюзеляж та інші частини не є абсолютно жорсткими, тому коливання будь-якого елемента, наприклад крила, мають викликати пружні коливання фюзеляжу, оперення, і навпаки. Так, при дії на крило поривів від турбулентної атмосфери збуджуються небезпечні коливання крила, фюзеляжу та інших малорозмірних частин – оперення літака. Причиною бафтинга літака є дія на окремі несучі поверхні (частіше на оперення ЛА) нестационарних аеродинамічних сил внаслідок відриву потоку на поверхнях, що розташовані спереду по потоку.

Коливання типу бафтинга можуть охоплювати не тільки окремі поверхні, але і весь літак. Іноді їх рівень стає таким, що утрудняється керування літаком, а пілот не може бачити показання приладів на приладовій дошці.

Для вертольотів однією з головних проблем є зниження вібрацій фюзеляжу від змінних аеродинамічних сил, що діють на лопаті несучого гвинта.

У процесі проектування і експлуатації літака й аналізу динамічних процесів у конструкції виникає потреба у вивченні динамічних характеристик ЛА – частот і форм власних коливань конструкції. Особливе значення мають динамічні характеристики незакріпленої конструкції (вільного літака), які отримують числовими і експериментальними методами. Динамічні характеристики дозволяють достатньо просто задати форми руху конструкції. Конструкція, яка має нескінченне число степенів вільності, може бути уявлена системою з обмеженим числом степенів вільності в результаті розкладання її руху за власними формами коливань.

На рис. 80 показані результати числового розрахунку власних коливань вільного літака на основі математичного моделювання руху конструкції. Дані отримані на основі достатньо складної математичної моделі динаміки руху вільної конструкції і подальшого числового розрахунку на ЕОМ її власних коливань. Пружною моделлю літака є сукупність балок, які наділені масовими і жорсткісними властивостями.

Зображений другий тон симетричних пружних коливань вільного ЛА. Коливання відбуваються з власною частотою $f_{вл} = 8,22$ Гц. Для наочності показана деформація елементів, які розташовані вздовж осей жорсткості крила і фюзеляжу. Таких форм руху і відповідних їм частот для вільного літака можна навести нескінченно багато, оскільки ЛА має нескінченне число степенів вільності. Практичне значення мають декілька нижчих тонів пружних коливань. У конструкції ЛА збуджуються, як правило, сумісні згинально - крутильні коливання.

Як бачимо, в процесі коливань на крилі і фюзеляжі є нерухомі точки – так звані вузлові лінії. У місцях найбільшого викривлення балок діють, очевидно, великі напруження від вигину. На такі ділянки конструкції треба звертати особливу увагу – змінні зовнішні сили можуть викликати великі деформації і напруження. Відзначимо, що деформація згинання та кручення крила призводить до зміни місцевих кутів атаки елементів несучих поверхонь, що важливо при визначенні нестационарного навантаження ЛА.

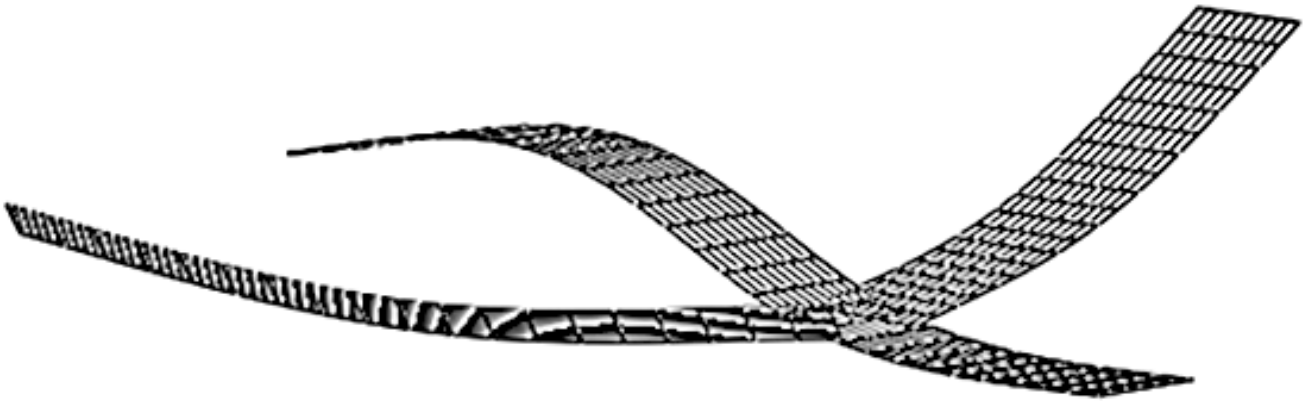


Рис. 80. Симетричний другий тон пружних коливань вільного ЛА

Вільні коливання ЛА супроводжуються значними коливаннями не тільки крила і фюзеляжу, але і оперення. Тільки в окремих випадках ними можна нехтувати.

Конструкція, що має певні власні частоти і форми коливання, працює як фільтр, відкликаючись на дію тільки певного нестационарного навантаження. Відклик конструкції стає помітним, якщо частота зовнішнього впливу близька до однієї з власних частот. Крім того, зовнішні сили мають здійснювати достатню роботу на можливих переміщеннях конструкції. Іноді рівень вібрацій конструкції стає неприпустимо великим і потребує заходів щодо їх зниження.

Мета завдання – на основі достатньо простої розрахункової схеми визначити частоти і форми власних симетричних і кососиметричних коливань конструкції вільного ЛА (літака - прототипу).

Для цього необхідно:

- як розрахункову схему літака взяти вільну балку, яка наділена жорсткістю вздовж розмаху крила і несе п'ять зосереджених мас;
- записати рівняння руху такої вільної механічної системи при симетричних і кососиметричних коливаннях конструкції;
- визначити частоти і форми власних симетричних і кососиметричних коливань конструкції;
- провести параметричні дослідження щодо впливу на динамічні характеристики літака його масових і жорсткісних характеристик.

Теоретичні положення і методичні вказівки до виконання домашнього завдання

Припущення і гіпотези:

- ЛА є симетричним відносно поздовжньої площини;
- стрілоподібність крила дорівнює нулю;
- всі маси літака розташовані на осі жорсткості крила;
- вісь жорсткості перпендикулярна до поздовжньої осі літака і несе декілька зосереджених мас;
- степені вільності ЛА пов'язані з його рухом як тверде тіло і пружною деформацією крила.

Динамічні характеристики вільного незакріпленого ЛА як системи з декількома степенями вільності

ЛА здійснює власні коливання за відсутності зовнішніх сил. Розглянемо власні коливання вільного незакріпленого літака у пустоті. Вони виникають після початкового збурення в результаті взаємодії внутрішніх сил пружності та інерції. Число степенів вільності такої пружної конструкції взагалі дорівнює нескінченності.

Аналіз вільних коливань на практиці проводять для різних розрахункових схем літака. На рис. 4 показані розрахункові схеми, які застосовують при визначенні частот і форм власних коливань для маневреного літака. Це може бути балкова схематизація (рис. 4,а), пластинчасто-балкова (рис. 4,б) або подання ЛА великою кількістю скінченних елементів (рис. 4,в).

Визначимо динамічні характеристики вільного ЛА як системи з декількома степенями вільності на основі ММ і числового експерименту на ПЕОМ. Спрощена розрахункова схема (рис. 81) дозволяє ясно зрозуміти основні деталі та фізичні закономірності, які відбуваються впродовж вільних коливань системи.

Літак уявимо у вигляді спрощеної схеми – балки, яка має масові і жорсткісні характеристики (рис. 81). Пов'яжемо з ЛА праву систему координат $Oxuz$. Початок координат збігається з центром мас літака, вісь Oz спрямована вздовж правого крила, а вісь Ox – до носу літака.

Видно, що літак симетричний відносно площини Oxy . П'ять зосереджених мас, що являють собою літак, розміщені на осі z . Вісь z збігається з віссю жорсткості крила. Літак як тверде тіло характеризується двома степенями вільності – вертикальним переміщенням центру мас і поворотом навколо центру мас відносно осі x . Крім того, всі маси в

процесі власних коливань рухаються у вертикальному напрямку внаслідок деформації крила.

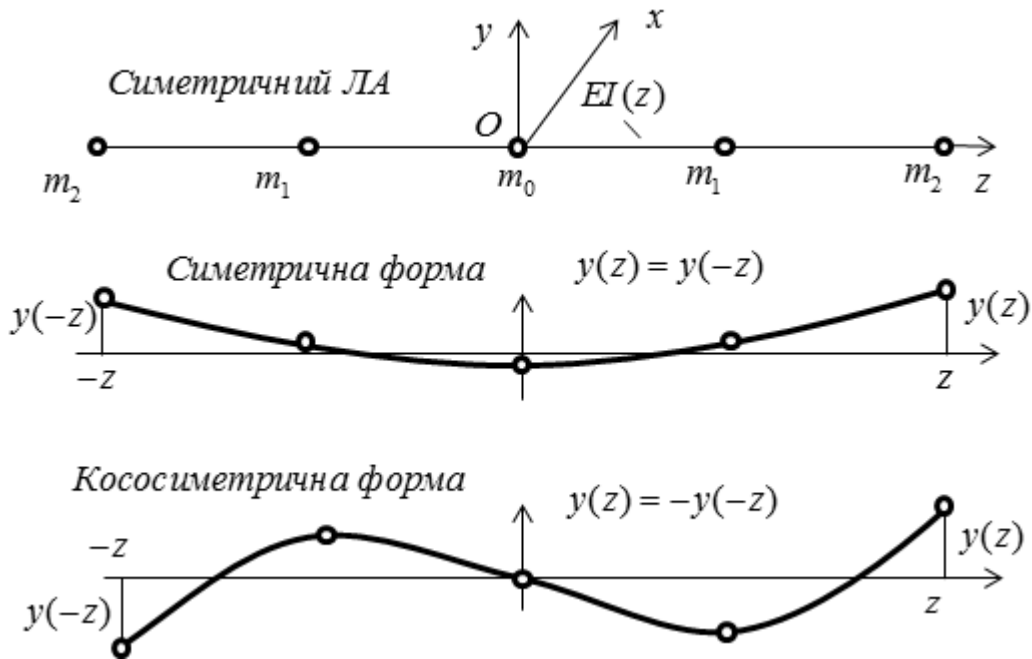


Рис. 81. Розрахункова схема ЛА і власні коливання вільного літака за симетричною і кососиметричною формами

ЛА, як правило, симетричні відносно площини Oxy . Симетрія передбачає симетрію в геометрії системи, в розподілі мас і жорсткостей і в умовах її закріплення. Якщо ЛА має площину симетрії, то в конструкції можливі симетричні і кососиметричні форми коливань і відповідні їм частоти.

На рис. 82 показано довільну форму пружної лінії крила під навантаженням. Покажемо, що цю форму можна подати комбінацією симетричних і кососиметричних функцій.

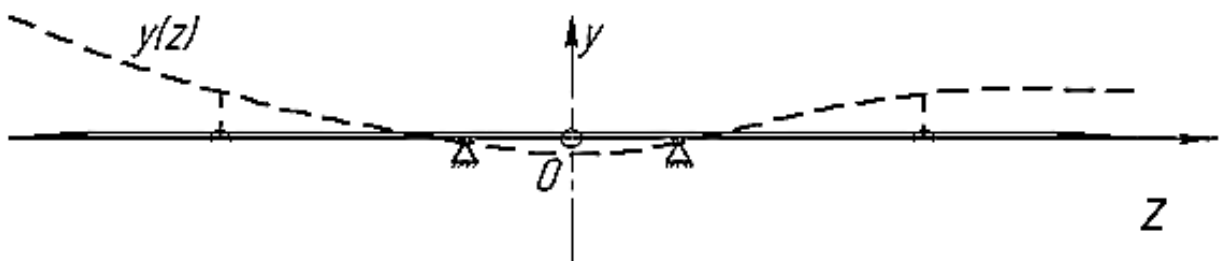


Рис. 82. Форма пружної лінії крила під навантаженням

Нехай функція $y(z)$ визначає довільну форму. Очевидно, що функція $y(z)$ може бути наведена у вигляді симетричних і кососиметричних функцій

$$y(z) = \frac{y(z)+y(-z)}{2} + \frac{y(z)-y(-z)}{2} = y_c(z) + y_{kc}(z), \quad (150)$$

де $y_c(z)$ – парна функція, симетрична щодо осі y ,

$$y_c(z) = \frac{y(z)+y(-z)}{2},$$

а $y_{kc}(z)$ – непарна функція, що має симетрію відносно початку координат

$$y_{kc}(z) = \frac{y(z)-y(-z)}{2}.$$

Таким чином, довільна функція $y(z)$ може бути наведена у вигляді суми симетричної $y_c(z)$ і кососиметричної $y_{kc}(z)$ функцій. Це дозволяє зменшити розмірність системи (кількість її степенів вільності) при визначенні форм і частот власних коливань, окремо розглядаючи симетричні і кососиметричні форми коливань конструкції.

Очевидно, що для даних функцій виконуються залежності (див. рис. 81)

$$y_c(-z) = y_c(z); \quad -y_{kc}(-z) = y_{kc}(z).$$

Крім того, для симетричної функції перша похідна при $z = 0$ дорівнює нулю:

$$\left(\frac{dy_c}{dz} \right)_{z=0} = 0,$$

а кососиметрична функція проходить через початок координат

$$y(z = 0) = 0.$$

Встановимо умови виникнення вільних коливань незакріпленої конструкції під дією внутрішніх сил.

Нагадаємо важливі для подальшого два фундаментальних закони механіки: теорему про рух центру мас і теорему про зміну моменту кількості руху механічної системи.

Теорема про рух центру мас. У динаміці широко використовують поняття центру мас системи матеріальних точок, який зазвичай позначається буквою S . Положення центру мас визначається в інерціальній системі відліку радіусом - вектором, який дорівнює

$$\vec{r}_c = (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n) / (m_1 + m_2 + \dots + m_n) = (1 / m_{\text{ЛА}}) \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i. \quad (151)$$

У рівнянні (151) m_i – маса i -ї матеріальної точки; \vec{r}_i – радіус - вектор, що задає положення цієї точки; $m_{\text{ЛА}} = \sum_{i=1}^n m_i$ – сумарна маса системи.

Відзначимо, що в однорідному полі сил тяжіння центр мас збігається з центром ваги системи.

Швидкість центру мас визначимо диференціюванням рівняння (151)

$$\vec{V}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{m_{\text{ЛА}}} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{m_{\text{ЛА}}} \sum_{i=1}^n m_i \vec{V}_i = \frac{1}{m_{\text{ЛА}}} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \frac{\vec{P}}{m_{\text{ЛА}}}, \quad (152)$$

де $\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i$ – імпульс системи. Згідно з (152) обчислюємо імпульс системи

$$\vec{P} = m_{\text{ЛА}} \vec{V}_c, \quad (153)$$

і прискорення центру мас

$$\vec{a}_c = \frac{d\vec{V}_c}{dt} = \frac{1}{m_{\text{ЛА}}} \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i, \quad (154)$$

де \vec{a}_i – прискорення i -ї маси. Прискорення i -ї маси визначається з другого закону Ньютона

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^e + \vec{F}_i^i$$

воно залежить від зовнішніх \vec{F}_i^e і внутрішніх \vec{F}_i^i сил. Оскільки векторна сума внутрішніх сил

$$\sum_k \vec{F}_k^i = 0,$$

з (154) отримаємо рівняння руху центру мас ЛА

$$m_{\text{ЛА}} \vec{a}_{\text{цм}} = \sum_k \vec{F}_k^e, \quad (155)$$

де $m_{\text{ЛА}}$ – маса ЛА;

$\sum_k \vec{F}_k^e$ – векторна сума зовнішніх сил.

Центр мас рухається так, як рухалася б матеріальна точка з масою, що дорівнює масі системи, під дією результуючої всіх зовнішніх сил,

прикладених до тіл системи. Прискорення центру мас залежить від векторної (геометричної) суми зовнішніх сил.

Для замкнутої системи зовнішні сили відсутні ($\sum_k \vec{F}_k^e = 0$). З (155)

випливає, що $\vec{a}_{цм} = 0$, тоді

$$\vec{V}_c = const, \quad (156)$$

тобто центр мас замкнутої системи рухається прямолінійно і рівномірно або покоїться. Система відліку, відносно якої визначається центр мас, називається системою центру мас. Ця система інерціальна. Таким чином, в процесі вільних коливань (зовнішні сили відсутні) центр мас системи не має прискорення.

На рис. 83 зображено центр мас пружної балки (симетричної системи) і деформовану конструкцію в процесі її вільних коливань.

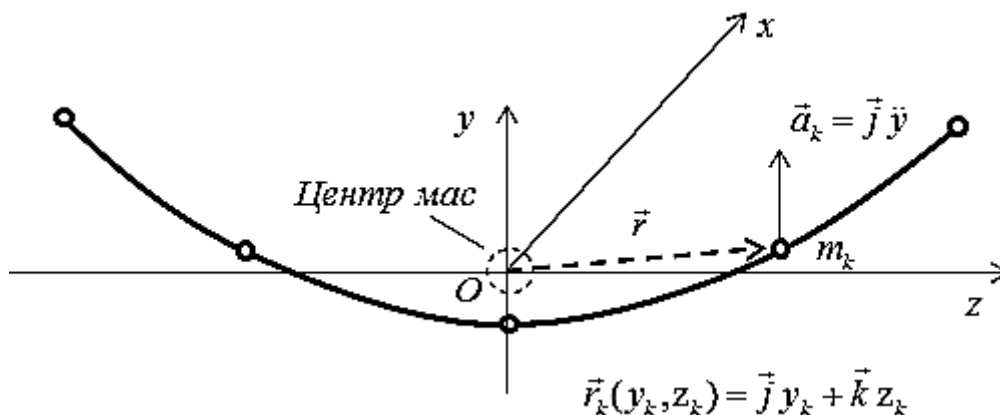


Рис. 83. Положення центру мас ЛА при вільних коливаннях

При вільних коливаннях маса m_k зміщується у вертикальному напрямку (вздовж осі y), тому її радіус-вектор \vec{r}_k лежить у площині Oyz і може бути розкладений на складові

$$\vec{r}_k(y_k, z_k) = \vec{j} y_k + \vec{k} z_k,$$

де y_k і z_k – координати радіуса-вектора;

\vec{j} , \vec{k} – одиничні орти.

При вільних коливаннях системи координата z_k маси не змінюється і її прискорення спрямовано вздовж осі y

$$\ddot{y}_k = a_{ky}.$$

Скористаємося рівнянням

$$\vec{a}_{цм} = \ddot{\vec{r}}_{цм} = \frac{1}{m_{ЛА}} \sum_k m_k \ddot{\vec{r}}_k.$$

З урахуванням того, що прискорення центру мас дорівнює нулю, отримаємо важливе векторне співвідношення для сил інерції – їх векторна сума впродовж вільних коливань дорівнює нулю

$$\sum_k m_k \ddot{\vec{r}}_k = 0. \quad (157)$$

Це так звана умова самоврівноваженості сил інерції при вільних коливаннях.

У проекції на вісь u рівняння (157) набирає вигляду

$$\sum_k m_k \ddot{y}_k = \sum_k (-m_k \ddot{y}_k) = 0.$$

Отже, алгебраїчна сума розповсюджених по всьому ЛА сил інерції в проекції на вісь u дорівнює нулю.

Теорема про зміну моменту кількості руху механічної системи.
Згідно з теоремою похідна за часом від векторної суми моментів кількості рухів системи відносно певної точки дорівнює сумі моментів зовнішніх і внутрішніх сил відносно тієї ж точки

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_k \vec{m}_o(m_k \vec{V}_k) \right) = \sum_k \vec{m}_o(\vec{F}_k^e) + \sum_k \vec{m}_o(\vec{F}_k^i), \quad (158)$$

де $\vec{m}_o(m_k \vec{V}_k)$ – момент кількості руху k -ї маси відносно точки O ;

$\sum_k \vec{m}_o(\vec{F}_k^e)$, $\sum_k \vec{m}_o(\vec{F}_k^i)$ – моменти зовнішніх і внутрішніх сил.

При вільних коливаннях моменти зовнішніх і внутрішніх сил дорівнюють нулю

$$\sum_k \vec{m}_o(\vec{F}_k^e) = \sum_k \vec{m}_o(\vec{F}_k^i) = 0.$$

Дійсно, зовнішні сили відсутні, а внутрішні сили, що виникають у системі при коливаннях, діють попарно в протилежних напрямках і моменту відносно точки O не дають.

Таким чином, при малих коливаннях похідна від моменту кількості руху матеріальних точок дорівнює нулю

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_k \vec{m}_o(m_k \vec{V}_k) \right) = 0. \quad (159)$$

Момент кількості руху системи подамо в проекціях на осі координат

$$\vec{m}_o(m_k \vec{V}_k) = \vec{r}_k \times m_k \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & y_k & z_k \\ 0 & m_k V_{ky} & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i}(z_k m_k V_{ky}). \quad (160)$$

Як видно, вектор моменту кількості руху спрямований вздовж осі x .

З (160) одержимо умову самоврівноваженості моментів сил інерції при вільних коливаннях

$$\sum_k z_k (-m_k \ddot{y}_k) = 0,$$

де z_k – координата k -ї точки.

Симетричні форми коливань незакріпленого ЛА

При симетричних коливаннях у довільний момент часу $y_c(-z) = y_c(z)$, тому прискорення на обох консолях крила розподіляються також симетрично відносно початку координат

$$\ddot{y}(-z) = \ddot{y}(z).$$

У формулі для функції i далі по тексту індекс «с» опущений.

На рис. 84 показано симетричну форму коливань незакріпленого ЛА і сили інерції, які діють на крило. Сили інерції, як видно, деформують пружне крило (балку). На рисунку зображені амплітудні відхилення y_0, y_1 і y_2 для відповідних мас m_0, m_1 і m_2 . У силу симетрії коливальна система має три степені вільності.

Відмітимо, що для сил інерції мають виконуватися встановлені вище дві умови їх самоврівноваженості. Вони мають вигляд

$$\begin{aligned} \sum_k (-m_k \ddot{y}_k) &= 0; \\ \sum_k z_k (-m_k \ddot{y}_k) &= 0. \end{aligned} \quad (160)$$

Слід відзначити, що для симетричної форми коливань друга вимога виконується автоматично:

$$z_2 m_2 \ddot{y}_2 + z_1 m_1 \ddot{y}_1 - z_1 m_1 \ddot{y}_1 - z_2 m_2 \ddot{y}_2 = 0.$$

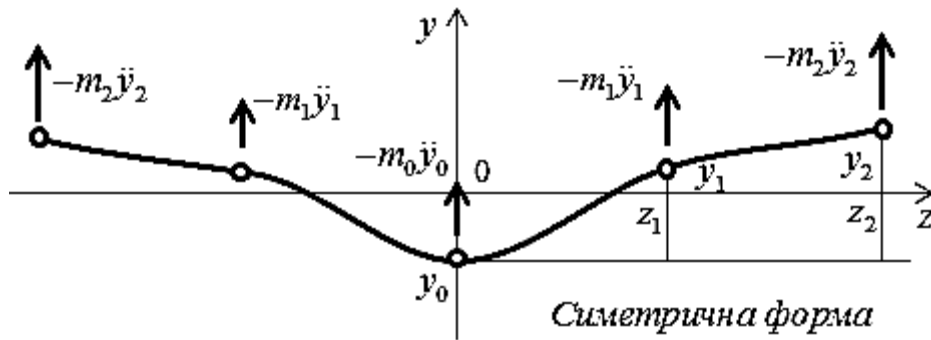


Рис. 84. Симетрична форма коливань літака

Таким чином, для визначення трьох невідомих одне рівняння встановлено і слід навести ще два співвідношення.

Розглянемо для цього пружний аспект задачі. В силу симетрії системи встановимо закономірності деформування для правого крила (рис. 85).

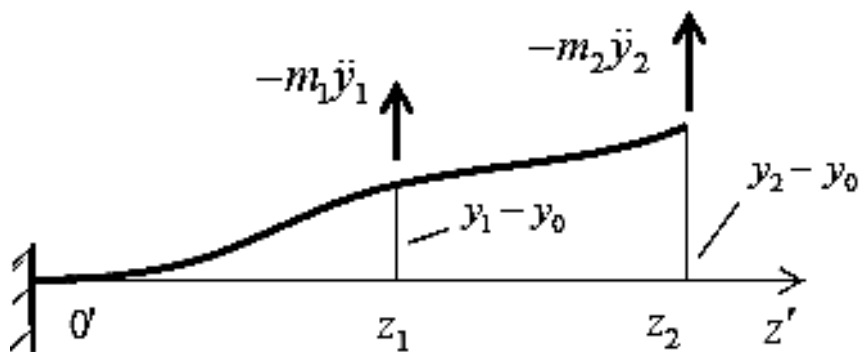


Рис. 85. Деформування правої консолі крила

Очевидно, що точку O' (місце перетину осі у пружною балкою) з точки зору граничних умов можна розглядати як місце защемлення правої половини крила. Відносно точки O' від дії сил реалізуються вертикальні зміщення $(y_1 - y_0)$ і $(y_2 - y_0)$ мас 1 і 2. Деформація виникає внаслідок дії сил інерції $(-m_1 \ddot{y}_1)$ і $(-m_2 \ddot{y}_2)$.

Згідно з принципом суперпозиції дії сил маємо такі два рівняння для пружної деформації консолі

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 &= (-m_1 \ddot{y}_1) \delta_{11} + (-m_2 \ddot{y}_2) \delta_{12}; \\ y_2 - y_0 &= (-m_1 \ddot{y}_1) \delta_{21} + (-m_2 \ddot{y}_2) \delta_{22}, \end{aligned} \quad (161)$$

де $\delta_{11}, \delta_{12} = \delta_{21}, \delta_{22}$ – коефіцієнти піддатливості, які визначаються для даної системи методами, що розглянуті вище. Їх фізичний смисл відомий – це переміщення від одиничних сил.

Таким чином, для визначення невідомих задач треба розглянути сумісно систему диференціальних рівнянь вільних коливань незакріпленого ЛА – (160) і (161)

$$\begin{aligned} (-m_0\ddot{y}_0) + 2(-m_1\ddot{y}_1) + 2(-m_2\ddot{y}_2) &= 0; \\ y_1 - y_0 &= (-m_1\ddot{y}_1)\delta_{11} + (-m_2\ddot{y}_2)\delta_{12}; \\ y_2 - y_0 &= (-m_1\ddot{y}_1)\delta_{21} + (-m_2\ddot{y}_2)\delta_{22}. \end{aligned} \quad (162)$$

При вільних коливаннях, як відомо, координати точок системи змінюються за гармонічним законом

$$y_k = A_k \sin(\omega_c t), \quad k = 0, 1, 2. \quad (163)$$

Після підстановки (163) в (162) маємо систему однорідних рівнянь відносно амплітуд коливань. Невідомими є три амплітуди вільних коливань $A_k, k = 0, 1, 2$ і власні частоти $\omega_{ck}, k = 0, 1, 2$. Спосіб вирішення системи однорідних рівнянь відносно чотирьох невідомих був розглянутий вище. З частотного рівняння визначають три частоти власних коливань і відповідні їм форми.

Очевидно, що одна із частот буде нульовою. Нульовій частоті фізично відповідає форма руху ЛА як твердого тіла – без деформації. Це рух ЛА вгору або вниз. Будемо підходити формально до нульової частоти таким же чином, як і до ненульової.

Результати моделювання на ПЕОМ вільних симетричних коливань.
Розглянемо легкий літак: маса фюзеляжу $m_\phi = 590$ кг, погонна маса крила $m_\pi = 5,7$ кг/м, довжина консолі $l_k = 4,2$ м, згинальна жорсткість (постійна вздовж розмаху) $EI = 291 \cdot 10^3$ Нм².

Для однорідного крила (з постійними параметрами m_π і EI) існують точні рішення щодо частот і форм власних коливань. Зіставимо їх з результатами моделювання на ПЕОМ вільних симетричних коливань літака (162) на основі наближеного підходу – методу дискретизації.

У методі дискретизації розподілена маса ЛА зведена лише до п'яти зосереджених мас.

Перші чотири точні частоти (у порядку зростання) для симетричних тонів пружних коливань становлять: $f = 7,33; 45,22; 125,99$ та $246,58$ Гц.

Таких частот можна навести нескінченно багато. Наближені частоти для тонів пружних коливань, які визначені на основі рівнянь (162), такі: $f = 7,788$ і $64,524$ Гц.

Як видно, при грубій схематизації масових властивостей системи тільки перший тон коливань при наближеному підході має задовільну точність.

На рис. 86 – 89 показані перші чотири форми тонів пружних коливань (точне рішення). Форми коливань нормовані – переміщення кінця крила дорівнює одиниці.

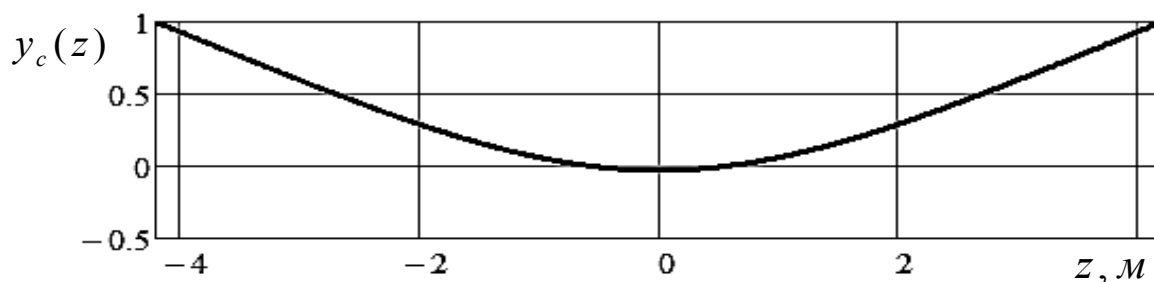


Рис. 86. Перша точна форма коливань

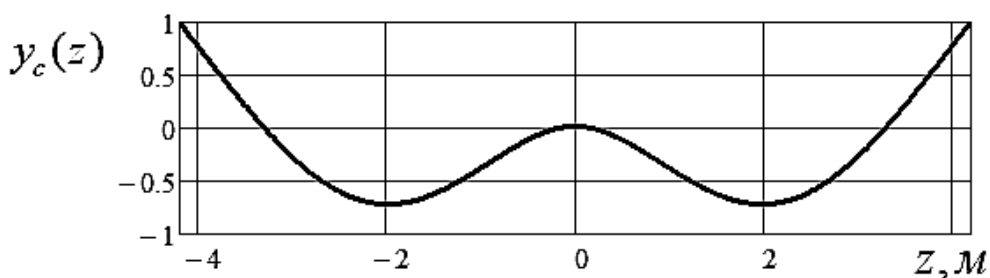


Рис. 87. Друга форма коливань

Як видно з рис. 86 і 87, відхилення маси, розміщеної на фюзеляжі, при коливаннях за першою та другою формами достатньо невелике. Це пов'язано з відносно великою масою фюзеляжу щодо маси крила. При визначенні динамічних характеристик такого ЛА припустимо в першому наближенні скористатися розрахунковою моделлю, защемленою до фюзеляжу консолі.

Зі збільшенням номера тону пружних коливань зростає кількість вузлів – нерухомих точок при коливаннях. Крім того, на окремих ділянках крила зростає кривизна пружної лінії. В точках з великою кривизною в конструкції будуть виникати великі напруження від коливань.

На рис. 90 наведено зіставлення точної і наближеної першої форми коливань.

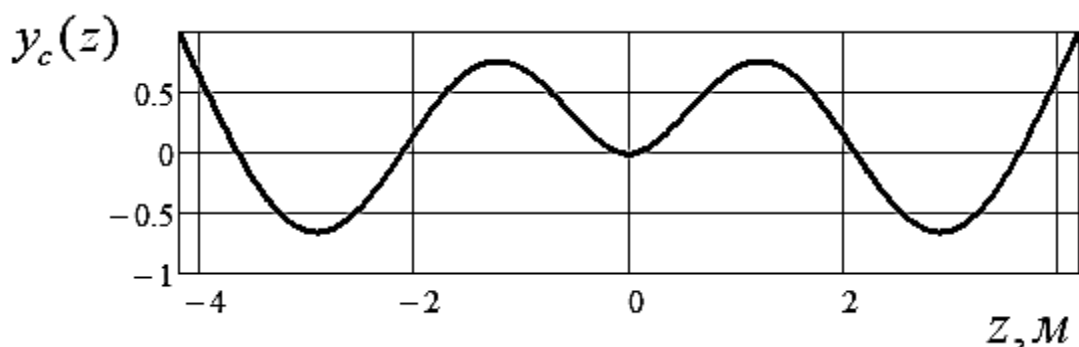


Рис. 88. Третя форма коливань

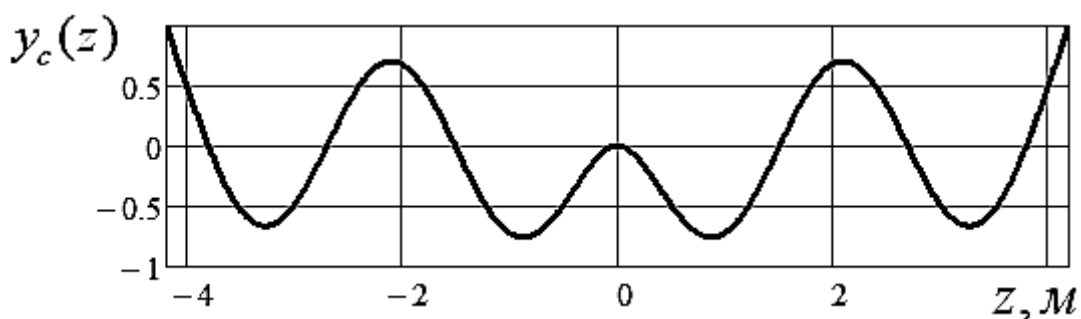


Рис. 89. Четверта форма коливань

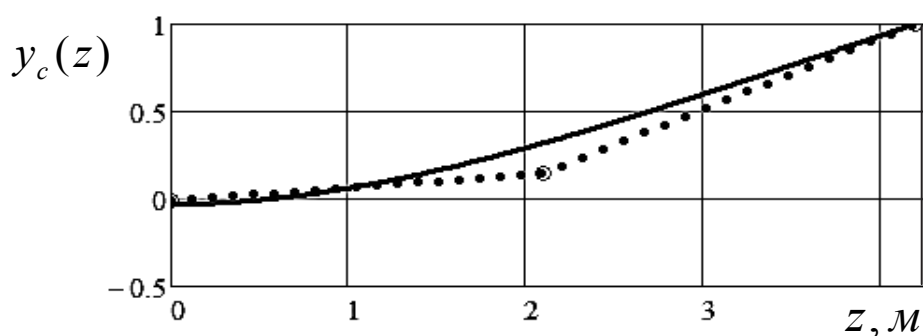


Рис. 90. Точна і наближена перша форма коливань

Як видно, точні й наближені форми коливань за першим тоном відрізняються суттєво. При збільшенні кількості дискретних мас на крилі до $n = 20$ (ступінь дискретизації задачі) точність моделювання динамічних характеристик ЛА можна значно підвищити.

На рис. 91 показані точна (суцільна лінія) і наближена форми симетричних коливань ЛА за другим тоном.

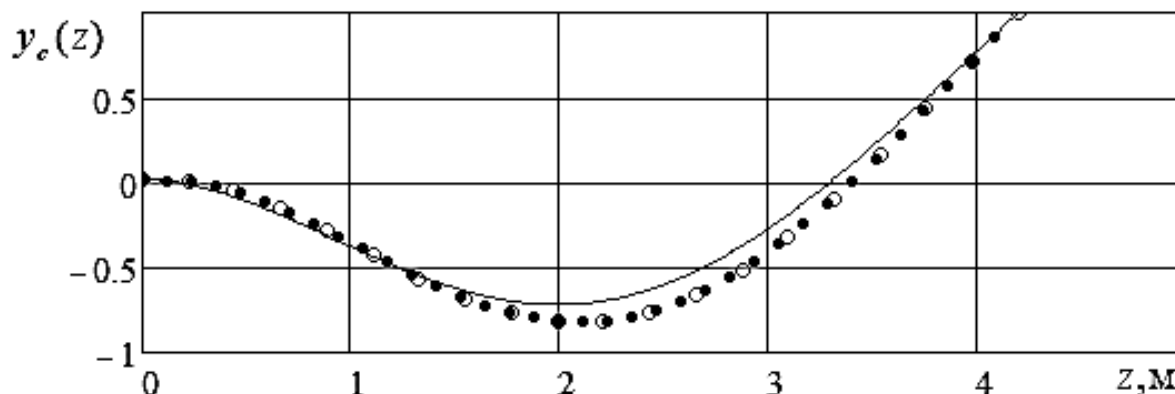


Рис. 91. Друга форма коливань

В табл. 2 показані точні й наближені значення частот симетричних власних коливань для перших трьох пружних тонів залежно від параметра n – числа степенів вільності системи. Як видно, при збільшенні міри дискретизації n точність розрахунків швидко зростає.

Кососиметричні форми коливань незакріпленого ЛА

При кососиметричних коливаннях у довільний момент часу відхилення точок крила задовольняють вимогу $y_c(-z) = -y_c(z)$, тому прискорення на лівій і правій консолі будуть однаковими за величиною, але спрямовані протилежно у будь - який момент часу

$$\ddot{y}(-z) = -\ddot{y}(z). \tag{164}$$

Таблиця 2

Точне значення частоти, Гц								
1-й тон			2-й тон			3-й тон		
7,332			45,217			125,992		
Наближене значення частоти, Гц								
$n = 3$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 3$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 3$	$n = 10$	$n = 20$
7,788	7,354	7,337	64,524	45,748	45,372	–	128,05	126,56

На рис. 92 показані розрахункова схема літака, кососиметрична форма коливань ЛА і діючі на пружну конструкцію сили інерції. При визначенні напрямку сил враховані співвідношення (164). Як бачимо, точка О, яка збігається з початком системи координат, у процесі коливань

нерухома. Маси m_1 і m_2 отримують зміщення y_1 і y_2 . Система має два степені вільності.

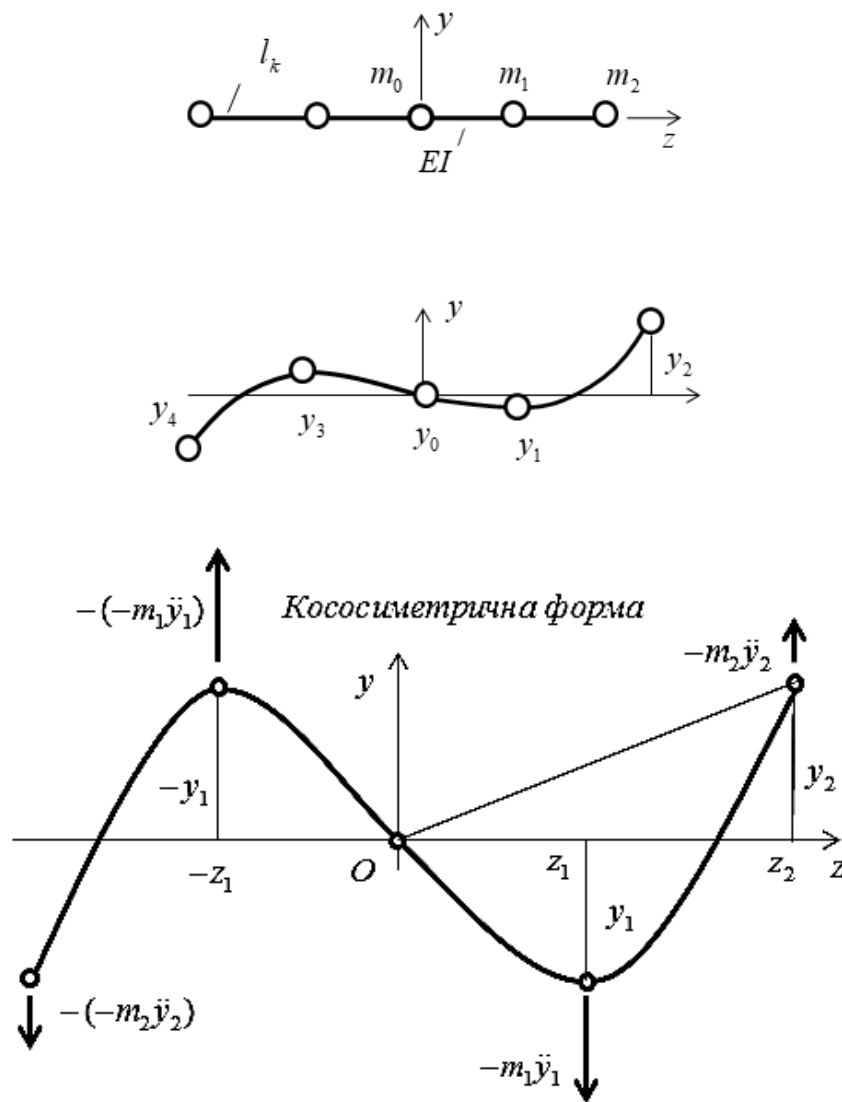


Рис. 92. Кососиметричні коливання літака

Умова самоврівноваженості сил і моментів сил інерції в процесі кососиметричних коливань виконується у будь-який момент часу

$$\sum_k (-m_k \ddot{y}_k) = 0;$$

$$\sum_k z_k (-m_k \ddot{y}_k) = 0. \tag{165}$$

Для кососиметричної форми коливань перше рівняння системи (165) виконується автоматично:

$$m_2 \ddot{y}_2 + m_1 \ddot{y}_1 - m_1 \ddot{y}_1 - m_2 \ddot{y}_2 = 0.$$

Проаналізуємо друге рівняння. В розвернутому вигляді маємо

$$\begin{aligned} z_2 m_2 \ddot{y}_2 + z_1 m_1 \ddot{y}_1 + z_1 m_1 \ddot{y}_1 + z_2 m_2 \ddot{y}_2 = \\ = 2(z_2 m_2 \ddot{y}_2 + z_1 m_1 \ddot{y}_1) = 0. \end{aligned}$$

Отже, момент від сил інерції консолей крила в точці O дорівнює нулю. Відзначимо, що поперечна сила на початку координат не нульова і набуває певного значення.

Розглянемо пружний аспект задачі. Встановимо закономірності деформування для правої консолю крила (рис. 93). На нижньому рисунку зображена схема навантаження консолю при дії сили інерції $(-m_1 \ddot{y}_1)$. У точках O і A зображені шарніри, оскільки в цих точках відсутні моменти. Сила інерції $-m_1 \ddot{y}_1$ врівноважена реакціями опор. Деформація вигину консолю крила в точці z_1 відмічена як Δy_{np} .

Очевидно, що деформація з лінійною точністю може бути записана так:

$$y_1 - y_2 \frac{z_1}{z_2} = \Delta y_{np}. \quad (166)$$

Для крила як лінійної системи можемо записати рівняння для переміщення

$$(-m_1 \ddot{y}_1) \delta_{11} = \Delta y_{np}, \quad (167)$$

де δ_{11} – переміщення в точці C , яке викликано одиничною силою, що прикладена в тій же точці.

Таким чином, для визначення невідомих задачі треба, скориставшись (165) і (166), розглянути сумісно систему двох диференціальних рівнянь вільних кососиметричних коливань незакріпленого ЛА

$$\begin{aligned} z_2 m_2 \ddot{y}_2 + z_1 m_1 \ddot{y}_1 = 0; \\ y_1 - y_2 \frac{z_1}{z_2} = (-m_1 \ddot{y}_1) \delta_{11}. \end{aligned} \quad (168)$$

При вільних коливаннях, як відомо, координати точок змінюються за гармонічним законом

$$y_k = A_k \sin(\omega_c t), \quad k = 0, 1, 2. \quad (169)$$

Після підстановки (169) в (168) маємо систему однорідних рівнянь відносно амплітуд коливань. Невідомими є дві амплітуди вільних коливань A_k , $k = 0, 1$ і власні частоти $\omega_{c k}$, $k = 0, 1$. Спосіб вирішення системи однорідних рівнянь відносно трьох невідомих був розглянутий вище. З

частотного рівняння визначають дві частоти власних коливань і відповідні їм форми.

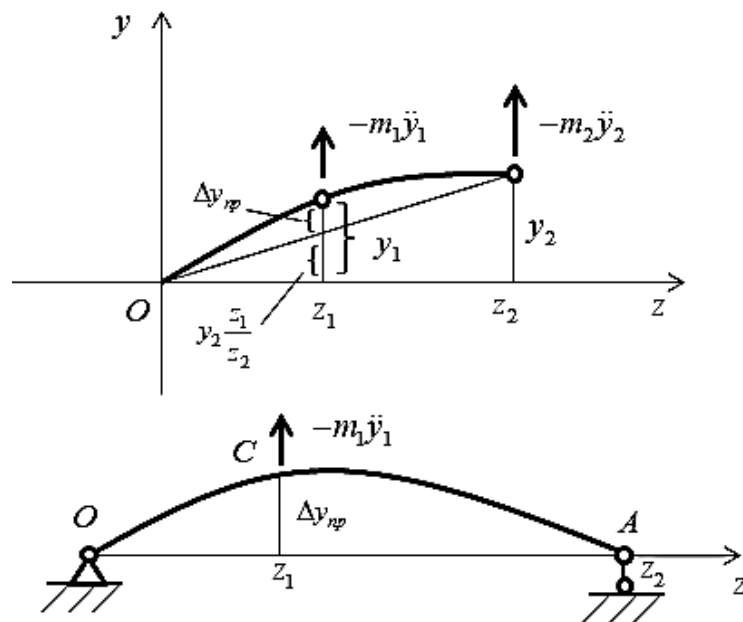


Рис. 93. Деформування правої консолі крила при кососиметричній формі коливань

Очевидно, що одна із частот буде нульовою. Нульовій частоті фізично відповідає форма руху ЛА як твердого тіла – без деформації конструкції. Таким рухом є обертання ЛА відносно осі x навколо центру мас.

Результати моделювання на ПЕОМ вільних кососиметричних коливань легкого літака

Точні значення перших чотирьох частот (у порядку зростання) кососиметричних тонів пружних коливань становили $f = 20,10; 80,41; 180,92$ та $321,64$ Гц. Таких частот можна навести нескінченно багато. Наближена перша частота пружного тону відрізняється майже на десять відсотків від точного значення і дорівнює $f = 22,3$ Гц.

На рис. 94 показано першу кососиметричну форму пружного тону: суцільна лінія – точна форма; пунктирна – наближена (вказані відхилення п'яти зосереджених мас). Коливання за першим тоном відбуваються з частотами: точне значення – $f = 20,10$ Гц; наближене – $f = 22,3$ Гц.

Легко бачити, що така кососиметрична форма задовольняє системі (168) – умовам самоврівноваженості сил інерції і лінійним співвідношенням теорії пружності.

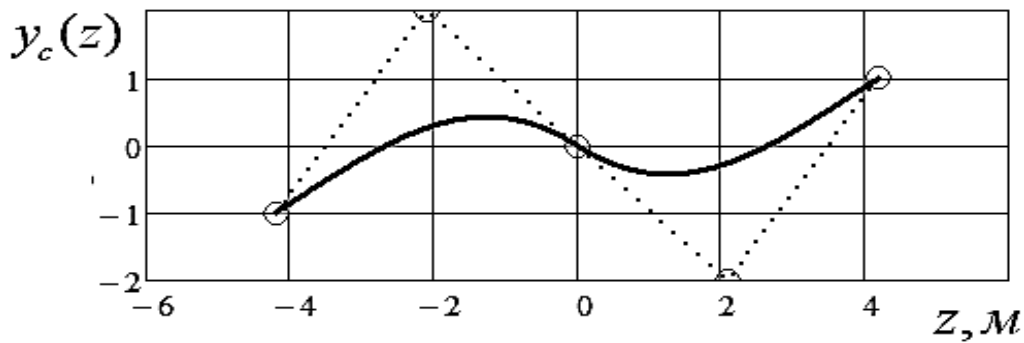


Рис. 94. Точна і наближена кососиметричні форми коливань

На рис. 95 показано другу кососиметричну форму коливань крила (точне значення), яка відбувається з достатньо великою частотою – $f = 80,41$ Гц.

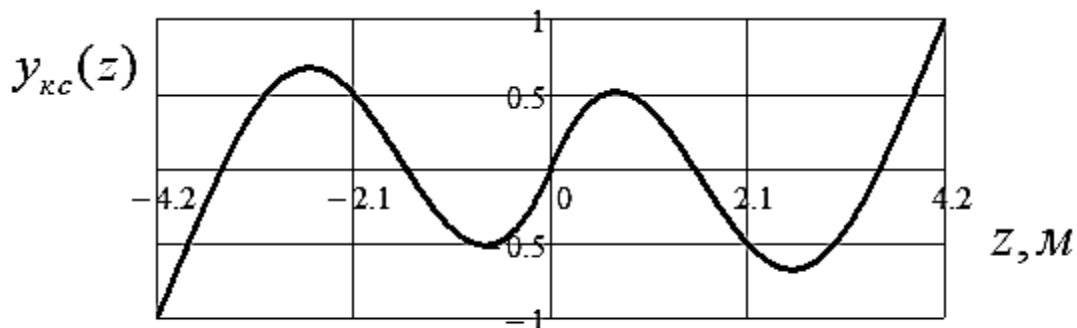


Рис. 95. Друга кососиметрична форма коливань крила (точне значення)

З рис. 94 та 95 видно, що відхилення на лівій і правій консолі в процесі коливань однакові за величиною, але спрямовані протилежно у будь-який момент часу. Слід відмітити ділянки крила, де кривизна пружної лінії при коливаннях найбільша. На такі ділянки необхідно звертати особливу увагу з урахуванням вимог до статичної міцності й довговічності конструкції.

Завдання № 6 Динаміка і навантаження шасі ЛА при посадці

Посадка ЛА є одним із відповідальних і небезпечних етапів польоту. За частки секунди сили при ударі сягають значних величин, в елементах планера і шасі від цих сил діють значні прискорення, в конструкції ЛА збуджуються механічні коливання.

Основними параметрами, що визначають навантаження шасі і літака при посадці, є вертикальна швидкість літака, просторове положення ЛА та його маса. Нерідко посадка виконується при відмовах і несправностях авіаційної техніки (відмові двигунів, системи керування літаком, неправильній зарядці амортизації рідиною або газом). Вертикальна швидкість ЛА значною мірою залежить від умов посадки (видимість злітно-посадкової смуги, наявність бокового вітру), кваліфікації льотчика, стану АТ і аеродрому. Крім того, літаки можуть експлуатуватися на ґрунтових аеродромах із незадовільним станом поверхні.

Кінетичну енергію удару має поглинути амортизаційна система літака і частково – пружна конструкція. Як відомо, зміна кінетичної енергії відбувається завдяки роботі діючих на ЛА зовнішніх сил. Такими силами є реакція поверхні аеродрому, аеродинамічні сили і сили тяжіння ЛА.

Найбільшими є сили реакції від поверхні аеродрому. Сумарна сила реакції при ударі в декілька разів перевищує вагу літака. Для її зменшення треба збільшити величину опускання центру мас літака – так званий шлях гальмування. Це забезпечується амортизацією шасі шляхом обтиснення пневматиків та амортизаторів. Для важких літаків суттєвим є і пружна деформація конструкції.

На літак діє аеродинамічна сила, яка до повного обтиснення амортизації спрямована вгору і тим самим зменшує енергію удару. У подальшому її треба різко зменшити. Для цього в певний момент удару автоматично вводяться в дію інтерцептори. Вони відхиляються на верхній поверхні крила і швидко зменшують аеродинамічну силу.

В Авіаційних правилах наведені різні розрахункові умови навантаження літака на злітно-посадкових режимах експлуатації ЛА (горизонтальна посадка, посадка з опущеним хвостом, посадка на одне колесо, дія бічного навантаження, зворотний удар при посадці, навантаження при розбігу, розворот, гальмування і т. ін.).

Для важких літаків динамічне навантаження при посадці є важливим і тяжким розрахунковим випадком. Навантаження треба визначати з урахуванням пружних коливань конструкції. Динамічні навантаження від пружних коливань є суттєвими за величиною і, як виявляється, найчастіше визначають міцність планера і шасі.

Розглядають випадки аварійної посадки ЛА, для яких наводять величини руйнівних перевантажень за трьома напрямками. При аварійній посадці конструкція літака може пошкоджуватися, однак при цьому має

бути забезпечена реальна можливість уникнути серйозних поранень пасажирів і членів екіпажу.

Аналіз такого складного динамічного процесу, як посадка літака, як показує практика, передбачає застосування всього комплексу експериментальних, розрахункових і теоретичних підходів. З метою скорочення термінів розроблення планера і амортизації шасі ЛА і економії коштів актуальним є використання розрахункового моделювання посадки ЛА.

У роботах [4, 5] наведені результати експерименту та моделювання на ЕОМ посадки на основні опори шасі магістрального літака. Вертикальна швидкість удару становила $V_y = 3,05 \text{ м/с}$, на основному стояку розміщені два здвоєних пневматики, амортизатор двокамерний.

На рис. 96 показано вертикальне навантаження основної опори шасі при ударі, а на рис. 97 – відклик конструкції (амплітудно-частотний спектр для реалізації $P_y(t)$).

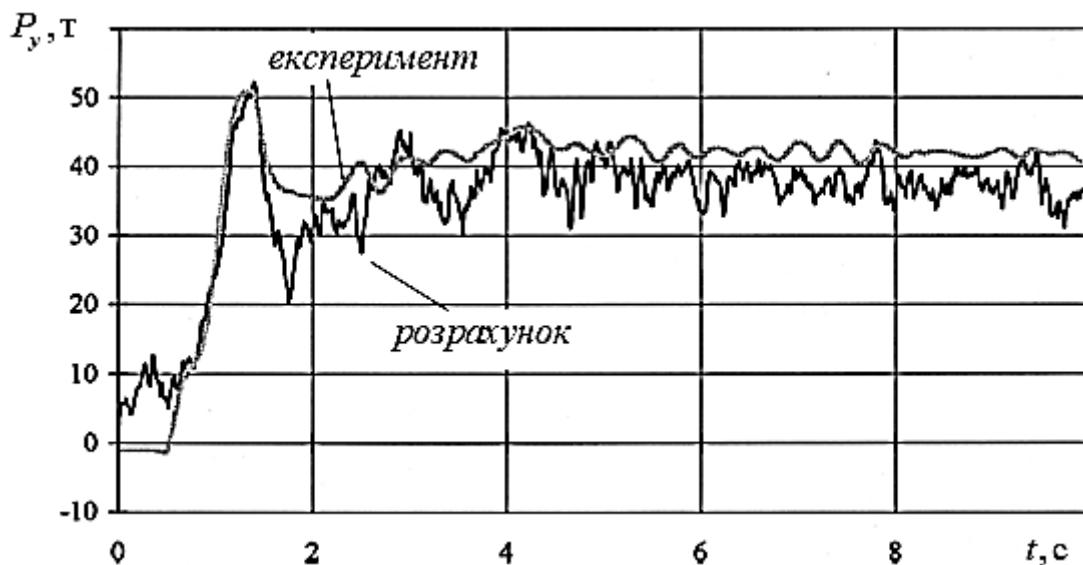


Рис. 96. Вертикальне навантаження основної опори шасі магістрального літака

Як видно, навантаження ЛА на посадці має складний динамічний характер. Результати моделювання вертикальної сили при ударі на основі ММ і числового експерименту на ЕОМ достатньо близькі до даних експерименту. За частки секунди сила удару сягає максимальної

величини. Високочастотна зміна сили, очевидно, пов'язана з пружними коливаннями конструкції і роботою амортизації.

Чотири нижчі частоти спектра навантаження (рис. 97) відповідають: першому тону симетричного згину крила (1,75 Гц), вертикальним коливанням двигуна (3,3 Гц), першому тону вертикального згину фюзеляжу (3,8 Гц) і другому тону симетричного згину крила (5,52 Гц).

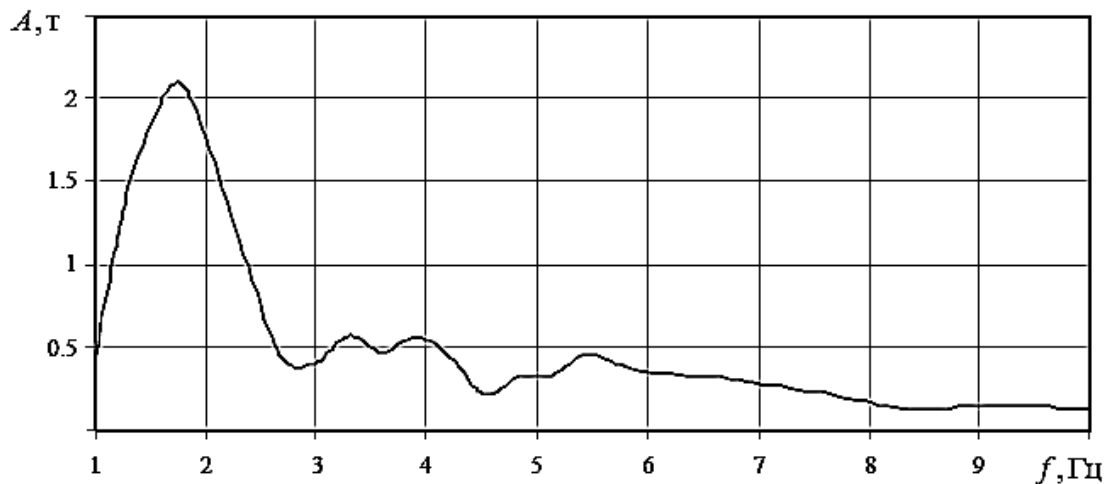


Рис. 97. Амплітудно - частотний спектр вертикального навантаження шасі

Цей приклад наочно ілюструє динамічну реакцію пружної конструкції літака на дію нестационарних сил – реакції поверхні аеродрому і розподіленого аеродинамічного навантаження літака. Велике значення має пошук максимальних величин навантажень, деформацій і напружень у конструкції, а в ряді випадків – і їх повторюваність.

Внаслідок складності задання динамічних навантажень теоретичним шляхом на практиці все частіше звертаються до математичного моделювання посадки на ЕОМ. Відзначимо, що при цьому застосовують випереджаюче функціонування математичних моделей об'єктів. Це можливо тільки при постійному корегуванні моделі на базі даних фізичного моделювання системи і льотного експерименту.

Найбільш повні ММ удару літака при посадці [2, 8] ураховують просторовий рух літака (переміщення центру мас та обертання навколо нього), роботу системи керування, пружність і коливання конструкції і нелінійність характеристик шасі (обтиснення рідинно-газового амортизатора та колеса, розкручування колеса та коливання стояка, тертя в буксах і кінематичних парах і т. ін.). Вимушені коливання пружного ЛА, як

показав досвід, здійснюють суттєвий внесок у рівень навантажень конструкції.

Пружні коливання і деформацію літака розраховують на основі методу заданих форм – деформацію ЛА розкладають за симетричними та кососиметричними формами вільних коливань конструкції.

Відмітимо, що ММ динамічної реакції ЛА мають функціонувати паралельно зі створенням ЛА і постійно вдосконалюватися. Вони дають важливу проміжну інформацію щодо створення надійної авіаційної техніки. Класичні розрахункові схеми, які спираються на аналітичні методи досліджень, уже не можуть бути основою наукової бази. Необхідно створення нової методології наукових досліджень на основі комплексного залучення аналітичного і експериментального методів й широкого застосування математичного моделювання і розрахункового експерименту на ПЕОМ.

Мета завдання – створити спрощену математичну модель динаміки удару ЛА на посадці і на її основі провести числові розрахунки на ЕОМ, проаналізувати динаміку та навантаження літака і провести параметричні дослідження щодо впливу на міцність експлуатаційних і конструктивних чинників.

Для цього необхідно:

- навести схему шасі літака-прототипу (основні стояки шасі – телескопічні);
- на основі статистичних даних визначити масу основного стояка шасі та його рухомих частин;
- визначити редуковану масу основного стояка шасі;
- підібрати колеса основної опори;
- визначити основні параметри однокамерного рідинно-газового амортизатора;
- записати рівняння руху та вимушених коливань для вибраних розрахункових схем ЛА (з однією, двома та декількома степенями вільності) при ударі;
- на основі створеної ММ провести числові розрахунки з використанням ЕОМ;
- проаналізувати динаміку та навантаження літака, визначити прискорення і перевантаження в центрі мас ЛА і елементах шасі, силу удару о поверхню і в елементах шасі;

– проаналізувати роботу колеса і амортизатора та деформацію конструкції.

Припущення і гіпотези

З метою спрощення розрахунків і аналізу системи далі прийняти такі припущення і гіпотези:

– посадка здійснюється на основні стояки шасі (розглядається випадок $E'_{ш}$, удар симетричний), всі стояки працюють паралельно, в однакових умовах;

– вважають, що літак збалансований за моментами (перевалювання ЛА на переднє колесо не розглядається);

– для основних опор розраховують їх редуковані маси;

– розглядають тільки вертикальну силу при ударі шасі, лобовий і боковий компоненти сил реакції відсутні;

– за кінематичною схемою стояк шасі вважають телескопічним, його передавальне число незмінне і дорівнює одиниці;

– амортизатор стояка шасі – однокамерний, ущільнення між штоком і циліндром розміщені на циліндрі.

Теоретичні положення і методичні вказівки до виконання домашнього завдання

Вертикальна швидкість літака. Редукована маса стояка. Експлуатаційна робота стояка.

У роботі розглянуто випадок $E'_{ш}$ – посадка на основні стояки (для шасі з носовим колесом). Приймають, що літак сідає на основні стояки, а хвостова запобіжна опора не торкається землі, але знаходиться в безпосередній близькості від неї.

Перед приземленням льотчик вирівнює літак відносно горизонту. Наступний етап траєкторії посадки – парашутування. Висота парашутування не перевищує 1 м, при грубих посадках – 2 м. Зазначеним висотам відповідають швидкості $V_y \approx 1,5$ м/с і $V_y \approx 3$ м/с.

Експлуатаційну вертикальну швидкість V_y^e літака розраховують за формулою

$$V_y^e = \sqrt{0,5(0,28V_{нос} + 0,01\sqrt{m_{нос}} + 8)}, \quad (170)$$

де $V_{нос}$ – поступальна швидкість ЛА, м/с; $m_{нос}$ – посадкова маса, кг. Згідно з Нормами льотної придатності для всіх розрахункових випадків величина V_y^e не має бути меншою 2,8 м / с.

Редукована маса стояка необхідна при розрахунках удару ЛА, а також при копрових випробуваннях амортизації шасі.

На важких літаках широке розповсюдження знайшли багатоопорні схеми шасі. На рис. 97 показано багатоопорну (чотири стояки – $n_{ocm} = 4$) і класичну трьохопорну схеми (два стояки – $n_{ocm} = 2$) шасі літака. На кожному основному стояку може бути довільне число коліс n_k .

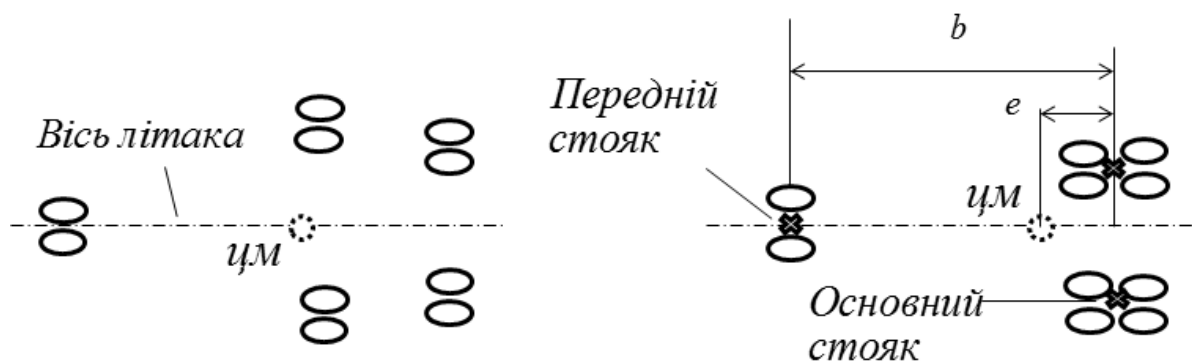


Рис. 97. Багатоопорна і класична трьохопорна схеми шасі

На рис. 98 показано симетричний удар ЛА на два основних стояка шасі. На одне колесо діє реакція поверхні аеродрому R_{on} , а сумарна сила від стояків – $n_{ocm} n_k R_{on}$. Поверхневі сили (піднімальна і сили реакції) викликають лінійне прискорення в центрі мас ЛА $a_{цм}$ та кутове прискорення ε_z . Літак здійснює складний рух – поступальне переміщення і обертання навколо центру мас.

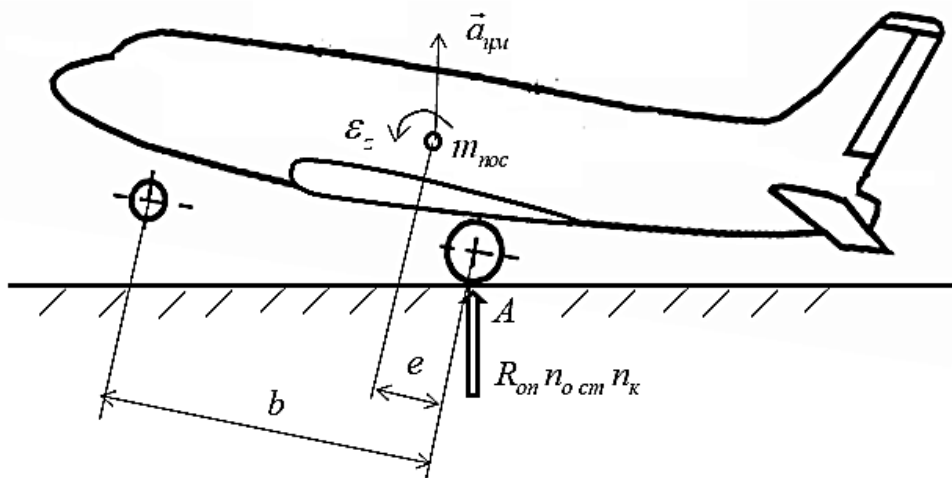


Рис. 98. Складний рух літака при ударі

Два основні стояки розміщені в площині точки А. Кожному стояку відповідає редукована маса. Ці маси рухаються поступально, у вертикальному напрямку. Треба розрахувати редуковану масу, щоб виконувалися умови динамічної еквівалентності розрахункової схеми і реальної системи.

Головний вектор $n_{ocm} n_{\kappa} R_{on}$ і головний момент $n_{ocm} n_{\kappa} R_{on} e$ сил R_{on} викликають прискорення в точці А літака

$$a_A = a_{цм} + \varepsilon_z e = \frac{n_{ocm} n_{\kappa} R_{on}}{m_{noc}} + \frac{n_{ocm} n_{\kappa} R_{on} e^2}{I_z}, \quad (171)$$

де I_z – момент інерції літака. Момент інерції літака може бути поданий через радіус інерції i_z :

$$I_z = m_{noc} i_z^2. \quad (172)$$

З іншого боку, таке ж прискорення має бути для маси $m_{пред}$, яка розміщена на стояку

$$a_A = \frac{n_{\kappa} R_{on}}{m_{пред}}. \quad (173)$$

Прирівнюючи (171) і (173), одержуємо

$$\frac{1}{m_{пред}} = \frac{n_{ocm}}{m_{noc}} + \frac{n_{ocm} e^2}{I_z},$$

звідки

$$m_{пред} = \frac{m_{noc} / n_{ocm}}{1 + \frac{m_{noc} e^2}{I_z}} = \frac{m_{noc} / n_{ocm}}{1 + \frac{e^2}{i_z^2}} \approx m_{noc} / n_{ocm}, \quad (174)$$

оскільки винесення основного колеса e є значно меншим радіуса інерції ЛА – $e \ll i_z$.

Таким чином, редуковану масу для двох основних стояків вважаємо такою, що дорівнює $m_{пред} = 0,5 m_{noc}$.

Експлуатаційна робота стояка. Вважаємо, що на основному стояку застосований один амортизатор – $n_{ам} = 1$. Енергія удару стояка, яка має бути поглинена амортизацією (якщо знехтувати пружністю конструкції), розподіляється між пневматиками і амортизатором:

$$A^e = \frac{m_{пред} V_y^e}{2} = A_{ам}^e + n_{\kappa} A_{\kappa}^e, \quad (175)$$

де $A_{ам}^e$ – експлуатаційна робота амортизатора;

$A_{к}^e$ – експлуатаційна робота пневматика колеса;

$n_{к}$ – кількість колес на одному стояку шасі.

Робота амортизаційної системи

Пневматики і амортизатори складають амортизаційну систему шасі, вони забезпечують опускання центру мас літака при ударі і зменшують реакцію злітної полоси. Через деформацію конструкції і полоси відбувається додаткове опускання центру мас літака. В шасі використовують телескопічний стояк (рис. 99).

З метою спрощень приймаємо, що вісь телескопічного стояка вертикальна, тобто $\theta = 0$, тому передавальне число в процесі обтиснення незмінне:

$$\varphi = \frac{P_{ам}}{n_{к} P_{к}} = \frac{\Delta h}{\Delta S} = \cos \theta = 1.$$

Роботу авіаційних коліс було розглянуто при виконанні ДЗ 2. Діаграма роботи колеса показана на рис. 46.

На рис. 100 зображено однокамерний газово-рідинний амортизатор із початковим тиском зарядки газом. Стояк шасі за кінематичною схемою – телескопічний, за силовою – підкісно-балковий. Пружним елементом амортизатора є газ (азот) під великим тиском, а як рідину використовують мінеральне масло. Ущільнення розташовані на циліндрі. Як видно, розглянуто лише вертикальну складову повної сили від поверхні аеродрому.

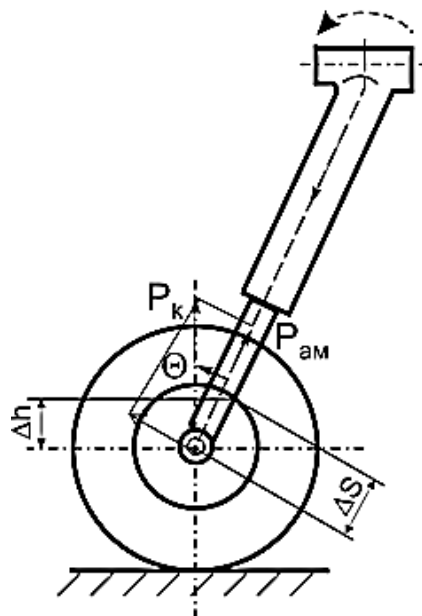


Рис. 99. Телескопічний стояк шасі

При русі штока вверх (на прямому ході амортизатора) рідина перетікає через калібровані отвори в плунжері та поршні штока – тиск газу (азоту) в порожнині А збільшується, в пружному елементі накопичується енергія (див. рис. 100). Розсіювання енергії відбувається через роботу сил тертя в брусках і продавлювання рідини (масла) через калібровані отвори в плунжері та поршні штока.

У процесі обтиснення амортизатора осьове навантаження на шток (з боку коліс) визначають так:

– на прямому ході

$$P_{ам} = P_г + P_{рід} + P_{тер} ; \quad (176)$$

– на зворотному ході

$$P_{ам} = P_г - P_{рід} - P_{тер} . \quad (177)$$

Сила стиснення газу змінюється за політропічним законом

$$P_г = p_0 F_{гн} \left(\frac{V_0}{V_0 - F_{гн} s_{ум}} \right)^n , \quad (178)$$

де V_0 – початковий об'єм газової камери в необжатому амортизаторі;

$s_{ум}$ – хід штока (поршня) амортизатора;

$F_{гн}$ – ефективна площа газового поршня. Якщо ущільнення розміщене на циліндрі, то $F_{гн} = 0,25\pi d_{ум}^2$; якщо на штоку – $F_{гн} = 0,25\pi D_ц^2$, де $d_{ум}$ і $D_ц$ – відповідно зовнішній діаметр штока і внутрішній діаметр циліндра;

p_0 – початковий тиск газу (в необжатому амортизаторі);

n – показник політропи ($n = 1,1 \dots 1,3$).

$P_{рід}$ – сила гідравлічного опору, створюється за рахунок підвищення тиску рідини в порожнині Б (при переміщенні поршня вгору) порівняно з тиском газу в порожнині А. Величина

$$P_{рід} = \Delta p F_{рід} , \quad (179)$$

де $F_{рід}$ – ефективна площа рідинного поршня.

В амортизаторі, показаному на рис. 100, величина $F_{рід}$ – площа штока (по його внутрішньому діаметру).

Перепад тиску виражається формулою

$$\Delta p = \frac{\gamma V_{рід}^2}{2g} , \quad (180)$$

де γ – питома вага рідини ($\gamma = \rho g$, ρ – густина рідини);

g – прискорення земного тяжіння;

$V_{рід}$ – швидкість витікання рідини через отвори в плунжері з порожнини Б у порожнину А.

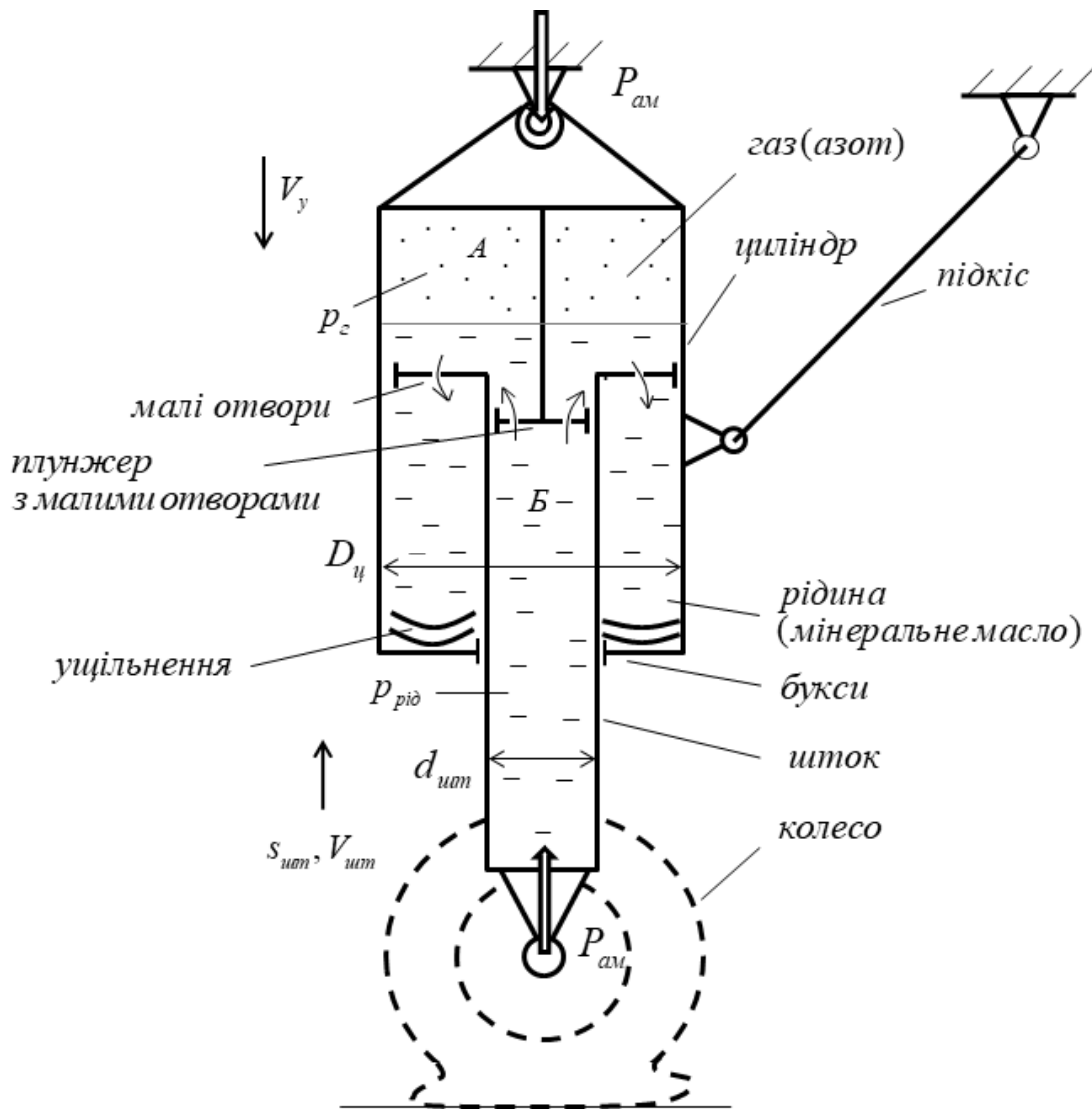


Рис. 100. Схема однокамерного амортизатора

Величина $V_{рід}$ може бути визначена з рівняння секундної витрати рідини через отвори:

$$F_{рід} V_{шт} = \mu_{рід} f_{рід} V_{рід},$$

де $V_{шт}$ – швидкість руху штока (поршня) в циліндрі;

$f_{рід}$ – площа малих отворів;

$\mu_{рід}$ – коефіцієнт витікання рідини через отвір площею $f_{рід}$, що характеризується звуженням струменя в отворі залежно від форми отвору (гострих або заокруглених країв) і в'язкості рідини.

Для округлених отворів в амортизаторі і масла АМГ-10 у діапазоні робочих температур $\mu_{рід} = 0,65 \dots 0,75$.

У результаті перетворень сила гідравлічного опору набуває такого вигляду:

$$P_{pi\partial} = \frac{F_{pi\partial} \gamma}{2\mu_{pi\partial}^2 g} \left(\frac{F_{pi\partial}}{f_{pi\partial}} \right)^2 V_{шт}^2. \quad (181)$$

Як видно, сила опору рідини залежить від квадрата швидкості штока. Для наближених розрахунків можна скористатися статистичними даними щодо значень $f_{pi\partial}/F_{pi\partial}$:

– для прямого ходу штока

$$f_{pi\partial}/F_{pi\partial} = 0,025 \dots 0,040;$$

– для зворотного ходу штока

$$\left(\frac{f_{pi\partial}}{F_{pi\partial}} \right)_{зв} = (0,4 \dots 0,6) \left(\frac{f_{pi\partial}}{F_{pi\partial}} \right)_{пр}.$$

Сила тертя ущільнень і напрямних букс $P_{мер}$ обчислюється як частка сили стискання газу P_2 :

$$P_{мер} = \zeta P_2, \quad (182)$$

де коефіцієнт ζ для телескопічних стояків приймають $\zeta = 0,1 \dots 0,15$.

Діаграма роботи амортизатора на прямому ході має вигляд, показаний на рис. 101, найбільше зусилля $P_{ам}^e$ відповідає експлуатаційному ходу $s_{шт}^e$. Зусилля попереднього затягування амортизатора – $P_{ам0}$. При цьому зусиллі амортизатор починає обтискуватися – долаються сили від тиску газу і тертя. Площа під кривою $P_{ам}(s)$ дорівнює експлуатаційній роботі $A_{ам}^e$, що сприймається амортизатором на прямому ході.

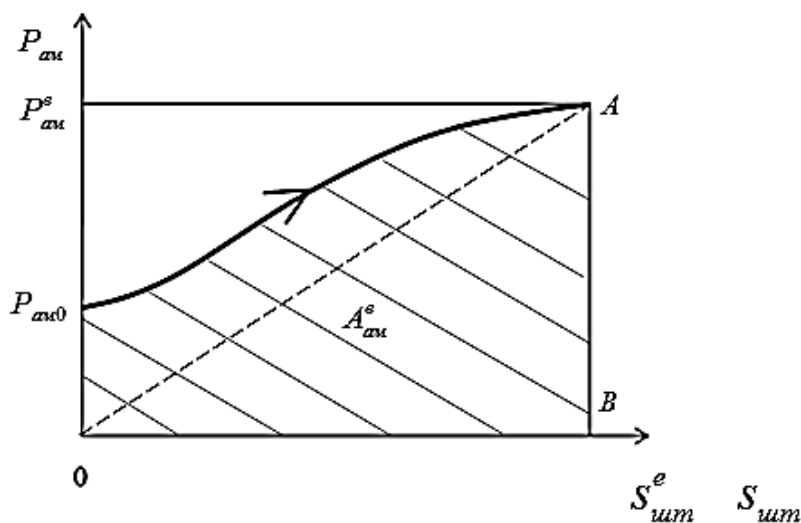


Рис. 101. Діаграма роботи амортизатора на прямому ході

Основні параметри амортизації

Відношення $A_{ам}^e$ до теоретично можливої роботи амортизатора $P_{ам}^e s_{ум}^e$ називається коефіцієнтом повноти діаграми

$$\eta^e = \frac{A_{ам}^e}{P_{ам}^e s_{ум}^e}. \quad (183)$$

Зазвичай приймають $\eta^e = 0,65 \dots 0,75$.

Коефіцієнт попереднього затягування амортизатора n_o визначається відношенням вертикального навантаження $P_{кo}$, що діє на колесо основної опори, при якій амортизатор починає обтискуватися, до стоянкового зусилля $P_{кст}$:

$$n_o = \frac{P_{кo}}{P_{кст}}. \quad (184)$$

Очевидно, що для відповідних зусиль в амортизаторі маємо

$$\frac{P_{амo}}{P_{амст}} = \frac{P_{кo} \varphi_0}{P_{кст} \varphi_{ст}} = n_o \frac{\varphi_0}{\varphi_{ст}}, \quad (185)$$

де φ_0 і $\varphi_{ст}$ – передавальні числа при необтисненому амортизаторі і стоянковому обтисненні (для телескопічного стояка прийнято, що $\varphi_0 / \varphi_{ст} = 1$).

Величину коефіцієнта попереднього затягування амортизатора вибирають залежно від типу літака і конструкції шасі. Чим більше різниця між злітною і посадковою масами, тим меншою приймають величину n_o . Для важких літаків, у яких посадкова маса приблизно в 2 рази менше злітної, щоб забезпечити прийнятну жорсткість амортизатора на посадці, приймають $n_o = 0,5 \dots 0,6$. Для легких літаків $n_o = 0,8 \dots 1,0$.

Коефіцієнт експлуатаційного перевантаження залежить від найбільшої сили колеса $P_{к}^e$ при сприйнятті нормованої роботи стояка $A_{ам}^e$ і визначається співвідношенням

$$n^e = \frac{P_{к}^e}{P_{кст}}, \quad (186)$$

де $P_{кст}$ – навантаження на стоянці на одне колесо. Величину n^e намагаються зробити близькою до коефіцієнта вантажопідйомності колеса

$$n_{ен} = \frac{P_{мпр}}{P_{кст}}, \quad (187)$$

де $P_{мпр}$ – максимально припустиме навантаження на колесо.

Найбільше експлуатаційне перевантаження при посадці обмежується величиною

$$n_{\max}^e = 2,6 + \frac{4500}{m_{\text{нос}} + 2500} \leq 3,5, \quad (188)$$

де $m_{\text{нос}}$ – посадкова маса, кг.

Експлуатаційну роботу пневматика наближено обчислюють так:

$$A_k^e = (0,45 - 0,5) P_k^e \delta_k^e, \quad (189)$$

де найбільша експлуатаційна сила P_k^e , що діє на пневматик, і його обтиснення δ^e дорівнюють

$$P_k^e = P_{kcm} n^e; \quad \delta_k^e = \delta_{kcm} n^e, \quad (190)$$

де P_{kcm} і δ_{kcm} – сила і обтиснення пневматика на стоянці.

Експлуатаційний хід штока амортизатора визначимо з (183):

$$s_{\text{ум}}^e = \frac{A_{\text{ам}}^e}{P_{\text{ам}}^e \eta^e}. \quad (191)$$

Коефіцієнт експлуатаційного перевантаження амортизатора

$$n_{\text{ам}}^e = \frac{P_{\text{ам}}^e}{P_{\text{амcm}}} = \frac{P_k^e \varphi^e}{P_{kcm} \varphi_{cm}} = n^e \frac{\varphi^e}{\varphi_{cm}}. \quad (192)$$

Площу газового поршня визначимо з умови рівноваги штока амортизатора на початку його обтиснення:

$$F_{zn} = \frac{n_k P_{kcm} n_0 \varphi_0}{p_0 (1 + \zeta)}, \quad (193)$$

де p_0 – початковий тиск в амортизаторі. Для телескопічних стояків з урахуванням забезпечення їх герметичності приймають $p_0 = 20 \dots 40$ атм.

Зовнішній діаметр штока і внутрішній діаметр циліндра розраховують так:

$$D_{\text{ц}} = 2 \sqrt{\frac{F_{zn}}{\pi}}; \quad d_{\text{ум}} = D_{\text{ц}} - 2\delta_{\text{уц}},$$

де $\delta_{\text{уц}}$ – ширина пакета, що ущільнює. Зазор між штоком і поршнем $\delta_{\text{уц}}$ визначається шириною манжети ущільнення і становить 5 ... 20 мм.

Початковий об'єм газової камери визначають із рівняння

$$V_0 = \frac{F_z s_{um}^e}{1 - \left(\frac{n_0 \varphi_0}{n^e \varphi^e} \right)^{1/n}} . \quad (194)$$

Маса елементів шасі

Відносна маса шасі становить 3 ... 5% від максимальної злітної маси $m_{зл}$. Головна частка маси шасі припадає на основні стояки з колесами. Маса носового стояка з колесом становить приблизно 10 ... 20% від повної маси шасі. Зі збільшенням злітної маси літака відносна маса носового стояка зменшується.

Масу шасі проєктованого літака можна подати так:

$$\bar{m}_{ш} = \bar{m}_{см} + \bar{m}_{к} ,$$

де $\bar{m}_{см} = m_{см} / m_{зл}$ – відносна маса стояків шасі;

$\bar{m}_{к} = m_{к} / m_{зл}$ – відносна маса коліс шасі .

Для трьохопорного шасі (з носовим стояком) можна рекомендувати формулу

$$\bar{m}_{см} = (6,32h + 7)\bar{m}_{нос} \cdot 10^{-3} - 0,3 \cdot 10^{-7} \bar{m}_o + 0,0047 , \quad (195)$$

де h – висота шасі, м;

$\bar{m}_{нос} = m_{нос} / m_{зл}$ – найбільша припустима з умов міцності відносна маса літака на посадці.

Величина посадкової маси залежить від маси палива, що витрачається в польоті:

– при $\bar{m}_{вупр} = 0,15 \dots 0,20$ $\bar{m}_{нос} = 1,0 \dots 0,95$;

$\bar{m}_{вупр} = 0,25 \dots 0,35$ $\bar{m}_{нос} = 0,80 \dots 0,90$;

$\bar{m}_{вупр} = 0,40 \dots 0,50$ $\bar{m}_{нос} = 0,70 \dots 0,75$.

Відносну масу коліс шасі можна оцінити так :

$$\bar{m}_{к} = 0,0293(2 - \bar{e}) \frac{\sqrt{p_{пн}}}{1 + p_{пн}} , \quad (196)$$

де $p_{пн}$ – тиск у пневматиках основних коліс, атм;

$\bar{e} = 0,06 \dots 0,12$ – частка злітної маси літака, що припадає на носовий стояк шасі на стоянці.

Розрахункові схеми шасі

Чим точніше ММ об'єкта, тим достовірніше результати чисельного рішення рівнянь його «стану». Сучасна обчислювальна техніка дозволяє вирішувати найскладніші задачі функціонування ЛА без спрощення їх ММ.

З методичних міркувань і розуміння «фізики» процесів скористаємося розрахунковими схемами шасі різного рівня точності. Для цього вводимо припущення і гіпотези щодо динаміки удару і роботи амортизації шасі.

Широке розповсюдження при аналізі роботи шасі ЛА має схема *одномасової системи з двома пружними елементами в'язкою ланкою*. Така схема може бути застосована до амортизації легкого літака (рис. 102), яка містить ресори і колеса.

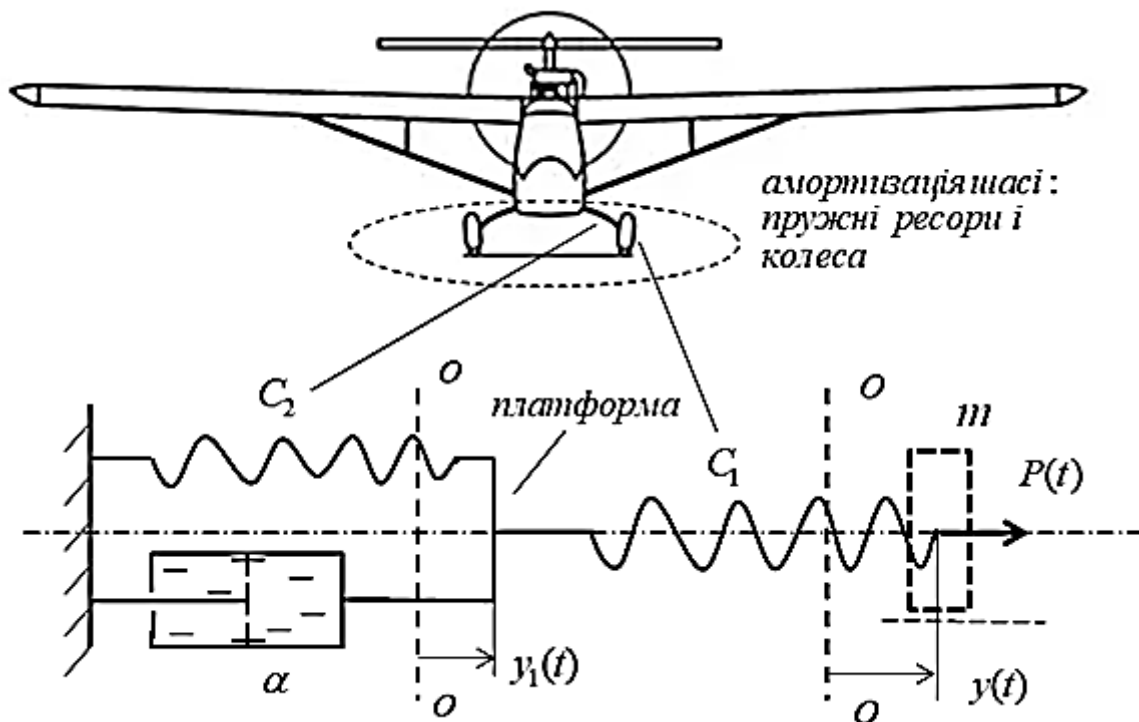


Рис. 102. Схема амортизації легкого літака

Позначимо: C_1 і C_2 – коефіцієнти жорсткості пружних елементів – пневматика колеса і ресори. Сили тертя виникають у матеріалі ресори при її циклічному деформуванні. Вважаємо, що конструкційне демпфірування в'язке (α – коефіцієнт в'язкості). Масою наділено колесо, а масою ресори нехтуємо. Платформа – безінерційна. Це більш складна система підвіски, вона не зводиться до пружнов'язкої системи (рис. 44), яку було розглянуто вище.

Відповідно до порядку рівняння руху системи (197), як буде показано нижче, її відносять до системи з $1 \frac{1}{2}$ степенями вільності. Неціле число степенів вільності мають так звані вироджені системи. Як тільки врахувати масу платформи, то система диференціальних рівнянь буде мати четвертий порядок і два степені вільності.

Встановимо зв'язок між зовнішньою силою $P(t)$ і переміщеннями $y(t)$ та $y_1(t)$ для випадку, коли система безмасова (відсутня маса m). Координати $y(t)$ і $y_1(t)$ відраховують від положень рівноваги системи. Необхідність введення двох координат пов'язана з тим, що при зміні внутрішньої поздовжньої сили рідина в демпфері не може миттєво перетікати через малі отвори в поршні з однієї до іншої порожнини. Швидкість перетікання рідини дорівнює $\dot{y}_1(t)$.

Очевидно, що в пружній і пружнов'язкій ланках діє однакова сила, яка дорівнює зовнішній силі

$$P(t) = C_1(y(t) - y_1(t)) = C_2 y_1(t) + \alpha \dot{y}_1(t).$$

Виключивши з цих рівнянь переміщення $y_1(t)$, одержимо досить складне диференціальне рівняння між силою і переміщенням $y(t)$:

$$\frac{\alpha}{C_1 + C_2} \dot{P}(t) + P(t) = \frac{C_1 \alpha}{C_1 + C_2} \dot{y}(t) + \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} y(t). \quad (197)$$

Слід розглянути два граничних випадки навантаження:

– *сила змінюється повільно*. Тоді можна вважати, що

$$\dot{P}(t) \approx 0; \quad \dot{y}(t) \approx 0.$$

З (197) знайдемо рівняння

$$P(t) = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} y(t). \quad (198)$$

Отже, пружна система характеризується еквівалентною жорсткістю

$$C_{екв} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Це фізично можна пояснити тим, що при повільному русі у в'язкій ланці практично не виникають зусилля і від дії сили деформуються дві послідовно з'єднані пружини;

– *сила змінюється різко* (рис. 102).

Тоді в рівнянні (197) для початкового інтервалу часу можна знехтувати членами, що містять $P(t)$ та $y(t)$. Отримаємо співвідношення

$$\dot{P}(t) = C_1 \dot{y}(t).$$

З урахуванням того, що при $t = 0$

$$P(0) = y(0) = 0,$$

після інтегрування знайдемо

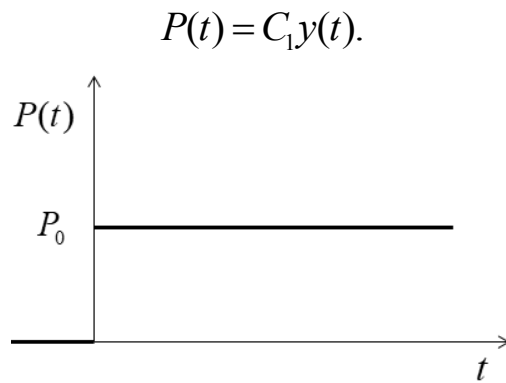


Рис. 102. Миттєве збільшення сили

Цей результат показує, що жорсткість системи збільшилася до C_1 – працює тільки перший пружний елемент – пневматик. При швидкому навантаженні в'язкий елемент (ресора) практично не деформується (рідина заперта), тому дуже малі деформації другого пружного елемента.

Наприклад, при миттєвому зростанні сили від нуля до P_0 переміщення різко збільшиться до

$$y(t) = P_0 / C_1.$$

Далі з часом слід у рівнянні (197) покласти $\dot{P}(t) = 0$:

$$P_0 = \frac{C_1 \alpha}{C_1 + C_2} \dot{y}(t) + \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} y(t).$$

При початковій умові $y(0) = P_0 / C_1$ інтегрування рівняння дає такий закон зміни координати:

$$y(t) = \frac{P_0}{C_2} (C_1 + C_2 / C_1 - e^{-\frac{C_2 t}{\alpha}}).$$

Видно, що при $t \rightarrow \infty$ переміщення наближається до

$$\frac{P_0}{C_1 C_2} (C_1 + C_2).$$

Цей процес збільшення переміщення при незмінній силі називають повзучістю.

Права точка може миттєво зміститися на величину y_0 . Отримаємо закон зміни сили, необхідний для цього.

Спочатку виникає сила $C_1 y_0$ (демпфер виключається з роботи). У подальшому $\dot{y}(t) = 0$ і рівняння руху має вигляд

$$\frac{\alpha}{C_1 + C_2} \dot{P}(t) + P(t) = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} y(t).$$

Його рішення при початковій вимозі $P_0 = C_1 y_0$ таке:

$$P(t) = \frac{C_1 y_0}{C_1 + C_2} \left(C_1 e^{-\frac{C_1 + C_2}{\alpha} t} + C_2 \right).$$

З часом сила зменшується до $\frac{C_1 C_2 y_0}{C_1 + C_2}$. Процес поступового спадання сили при фіксованому переміщенні називається релаксацією.

Знайдемо загальний характер руху системи за наявності маси (рис. 102) і зміщеннях у системі $y(t)$ і $y_1(t)$ від положення рівноваги. Рівняння руху маси

$$m \ddot{y}(t) = C_1 (y(t) - y_1(t)) \quad (199)$$

слід доповнити рівнянням щодо незмінності сили у безмасовій ланці

$$C_1 (y(t) - y_1(t)) = C_2 y_1(t) + \alpha \dot{y}_1(t). \quad (200)$$

Виключаючи з рівнянь (199) і (200) координату $y_1(t)$, отримаємо рівняння третього порядку

$$m \alpha \ddot{\ddot{y}}(t) + m(C_1 + C_2) \ddot{y}(t) + \alpha C_1 \dot{y}(t) + C_1 C_2 y(t) = 0,$$

для вирішення якого треба задати три початкові вимоги $y_1(0)$; $y(0)$ і $\dot{y}(0)$. Відмітимо, що значення $y_1(0)$ незалежно задавати не можна – воно визначається зі співвідношення (200).

Для легкого літака отримаємо рішення системи для таких вихідних даних: $P_0 = 8,8 \cdot 10^3$ Н; $C_1 = 2 \cdot 10^5$ Н/м; $C_2 = 1,4 \cdot 10^5$ Н/м і $\alpha = 1,3 \cdot 10^3$ Н/(м/с). Розглянемо випадок дуже різкого зростання сили за час $\Delta t = 0,001$ с від нуля до P_0 і подальшого постійного значення (рис. 103).

$$P(t) = \frac{P_0}{\Delta t} t (0 \leq t \leq \Delta t) + P_0 (t > \Delta t).$$

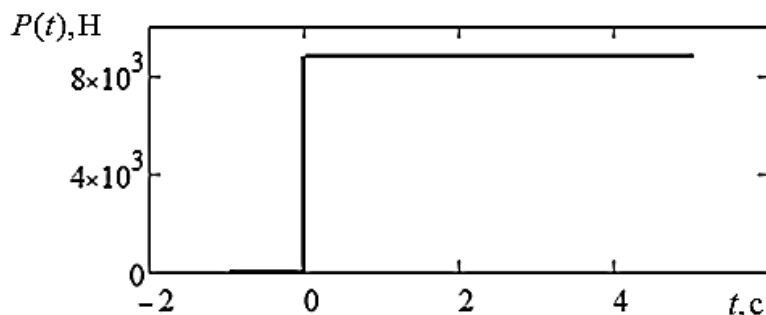


Рис. 103. Різке зростання сили за час $\Delta t = 0,001$ с

Зміну координат при майже миттєвому прикладанні сили визначимо з рівняння

$$P(t) = C_1(y(t) - y_1(t)) = C_2 y_1(t) + \alpha \dot{y}_1(t).$$

На рис. 104 показані результати його інтегрування при нульових початкових умовах.

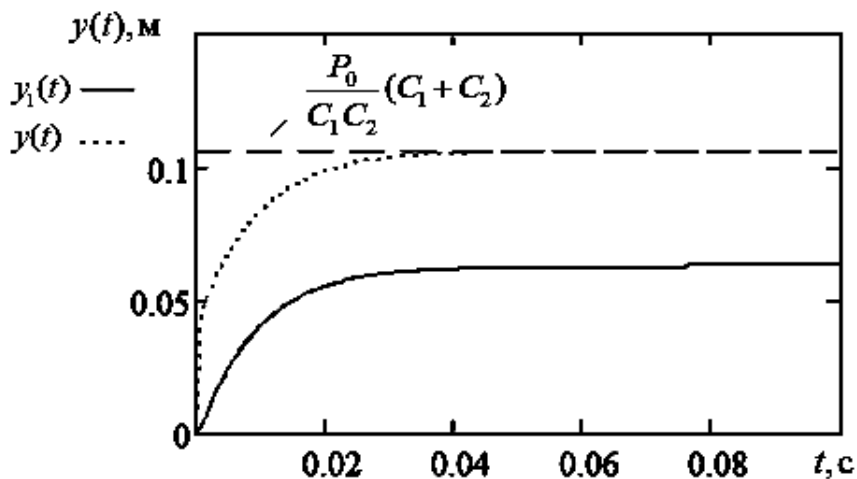


Рис. 104. Зміна координат при миттєвому прикладанні сили

Як видно, при $t \rightarrow \infty$ переміщення наближаються в результаті повзучості до $\frac{P_0}{C_1 C_2} (C_1 + C_2)$.

Швидкості точок системи з часом змінюються так, як показано на рис. 105.

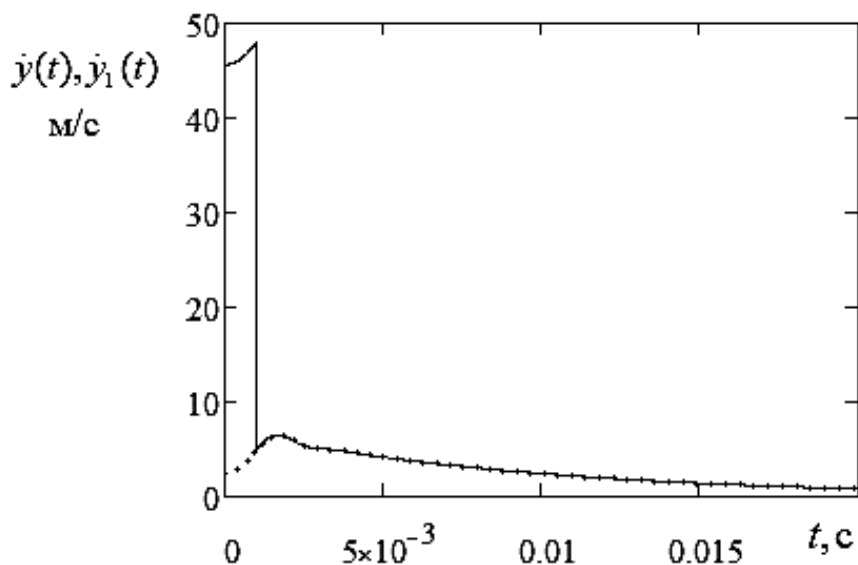


Рис. 105. Зміна швидкостей точок системи

На рис. 106 зображені прискорення, які виникають у безмасовій системі. До моменту часу Δt сила швидко зростає за лінійним законом, а потім є незмінною. Тому прискорення до моменту Δt інтенсивно зростають. Це пояснюється миттєвим зовнішнім навантаженням і тим, що в системі немає інерційних елементів. Слід відзначити, що прискорення платформи і точки прикладення сили однакові, оскільки сила миттєво передається через пружину C_1 .

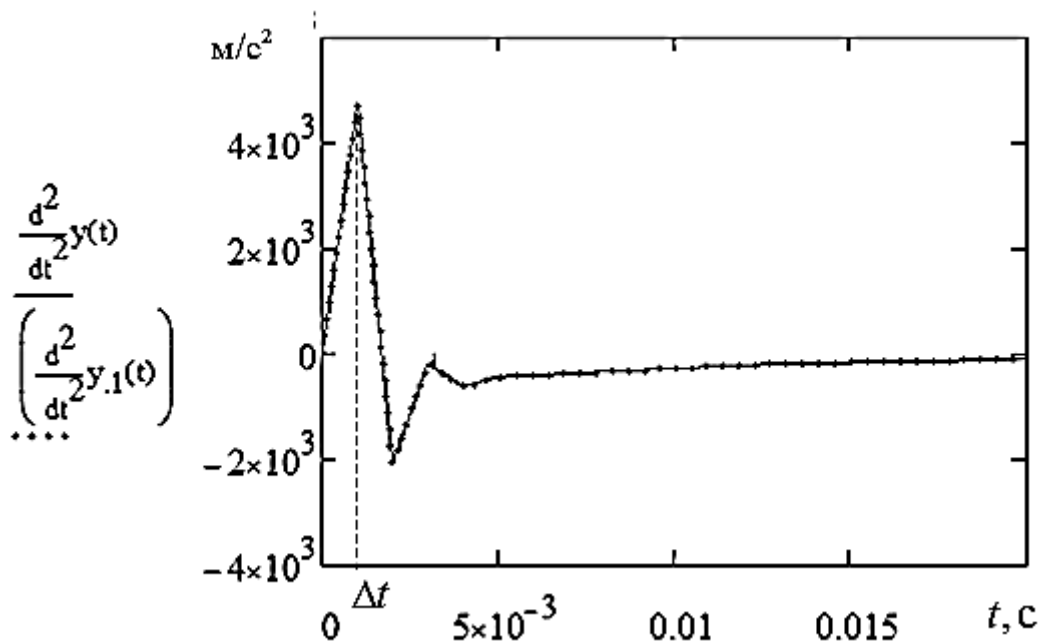


Рис. 106. Прискорення елементів системи

Як видно, лише в початковий момент швидкість елементів системи відрізняється.

Система з одним степенем вільності

На рис. 107 показано найбільш просту при розрахунках і аналізі роботи схему амортизації стояка шасі. Показано її конфігурацію в певний момент часу. Це одномасова система з двома пружними елементами і в'язким демпфером.

Редукційна маса, що припадає на два основних стояки шасі, дорівнює посадковій масі — $m_{ред} \approx m_{noc}$. Масою коліс та інших рухомих частин на стояку нехтуємо. Вводяться дві узагальнені координати, які задають положення редукованої маси $m = m_{noc}$ і безмасової платформи. Координати $y(t)$ і $y_1(t)$ відраховують від положень $O - O$ (відповідають моменту торкання колеса полоси, коли деформація в амортизації відсутня).

Вважають, що ЛА (крило, фюзеляж, тощо) не деформується. Пружними властивостями наділені колеса (пневматики) і амортизатори (ресори) двох стояків шасі. На стояку може бути розміщено декілька коліс. Відбувається симетричний удар ЛА на основні стояки. Показані зовнішні сили, що діють на стояк, – $G/2, Y/2, R_{on} n_k$ (сили тяжіння, піднімальна і реакції опор стояка).

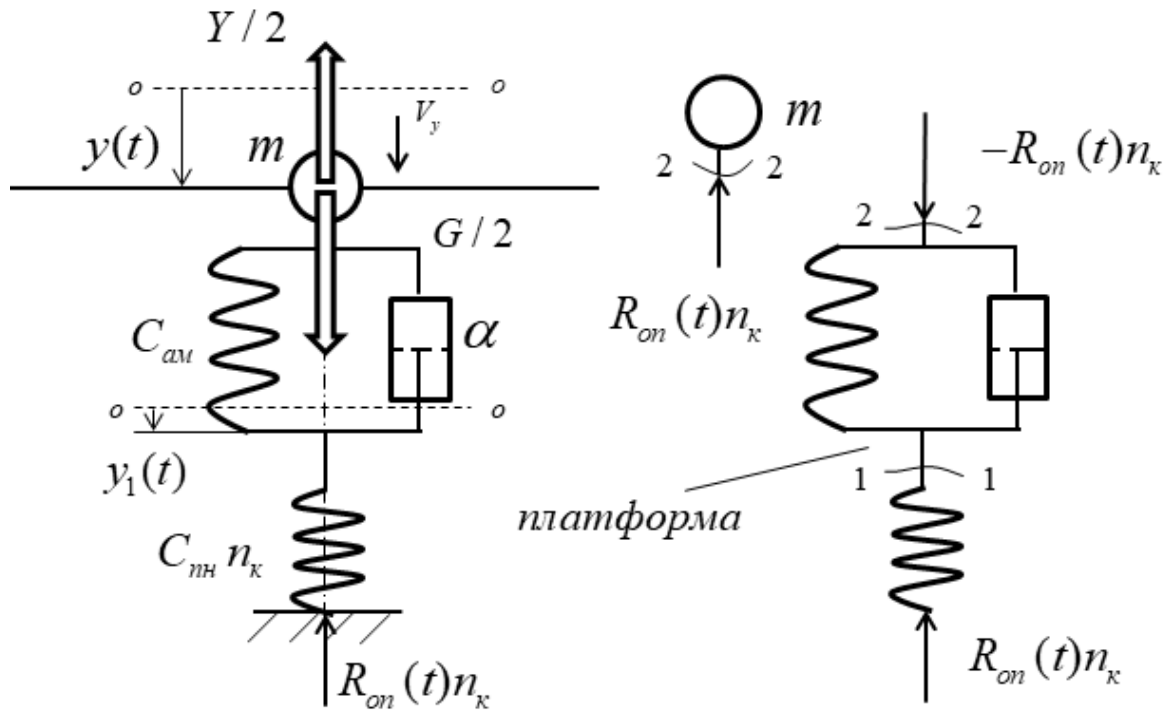


Рис. 107. Розрахункова схема амортизації шасі з одним ступенем вільності

Для легкого ЛА в'язке тертя виникає в ресорах, які часто виготовляють із композиційного матеріалу. Як відомо, застосування композиційного матеріалу дозволяє збільшити демпфірування в системі в декілька разів.

Схема (рис. 107) може бути застосована і для літаків транспортної категорії як перше наближення. Як відомо, на таких літаках використовують рідинно-газові амортизатори, діаграма роботи яких не дозволяє скористатися постійним параметром $C_{ам}$ – жорсткістю амортизатора. Залежність сили в амортизаторі від його обтиснення $P_{ам}(s_{ум})$ є нелінійною. Крім того, амортизатор характеризується коефіцієнтом попереднього затягування – він починає обтискатися, починаючи від певного зусилля.

Як жорсткість амортизації для таких літаків можна взяти еквівалентну жорсткість пружини $C_{ам\ екв}$, яка задовольняє статичній вимозі – в момент експлуатаційного обтиснення амортизатора $s_{ум}^e$ на нього діє сила $P_{ам}^e$:

$$P_{ам}^e = C_{ам\ екв} s_{ум}^e.$$

Відмітимо, що при такому значенні жорсткості робота, яка поглинається амортизатором, сильно занижена. Це видно з рис. 101, де зображено типову діаграму роботи рідинно-газового амортизатора. Площа під нею – це робота амортизатора на прямому ході, вона значно більше площі трикутника OAB :

$$S_{OAB} = 1/2 P_{ам}^e s_{ум}^e = 1/2 C_{ам\ екв} s_{ум}^e{}^2,$$

яка дорівнює роботі еквівалентної пружини.

Всі пневматики на стояку працюють паралельно, тому їх еквівалентна жорсткість

$$C_{екв\ нн} = C_{нн} n_{\kappa}. \quad (201)$$

Запишемо рівняння руху центру мас літака і лінійні співвідношення для деформації безмасової амортизації.

Рівняння руху редукованої маси стояка в проекції на вісь y має вигляд

$$m \ddot{y}(t) = -Y(t) / 2 + G / 2 - R_{он}(t) n_{\kappa}, \quad (202)$$

де $Y(t)$ – піднімальна сила, яку згідно з АП приймають такою, що дорівнює

$$Y(t) = 0,75 m_{noc} g. \quad (203)$$

Доцільно провести дослідження навантаження ЛА для випадків, коли $Y(t)$ – певна функція часу;

$R_{он}(t)$ – реакція поверхні аеродрому, що діє на одне колесо. Всього маємо n_{κ} коліс. Оскільки, як видно з рис. 107, деформація пневматика колеса $\delta_{нн}(t)$ дорівнює координаті $y_1(t)$, то сила, що діє на одне колесо:

$$R_{он}(t) = C_{нн} \delta_{нн}(t) = C_{нн} y_1(t), \quad (204)$$

де $y_1(t)$ – вертикальне переміщення платформи.

Відмітимо, що $R_{он}(t) = 0$, якщо координата $y_1(t)$ від'ємна, тобто відсутній контакт між пневматиком і аеродромом – колесо відривається від полоси. Слід відзначити, що сила $R_{он}(t)$ миттєво деформує амортизацію і передається на масу m . Це видно на рисунку справа, де

показані перерізи системи і зображена рівновага елементів, що не мають маси.

Рівняння, що має координату платформи $y_1(t)$ і її похідну, можна отримати з умови рівноваги пневматиків і ресори стояка. Силу в перерізі можна обчислити так:

$$C_{nn} y_1(t) n_k = C_{ам} (y(t) - y_1(t)) + \alpha(\dot{y}(t) - \dot{y}_1(t)) = R_{он}(t) n_k. \quad (205)$$

Отже, система рівнянь, що описує рух маси і деформування системи, має вигляд

$$\begin{aligned} m \ddot{y}(t) &= -Y(t) / 2 + G / 2 - R_{он}(t) n_k; \\ C_{nn} y_1(t) n_k &= C_{ам} (y(t) - y_1(t)) + \alpha(\dot{y}(t) - \dot{y}_1(t)). \end{aligned} \quad (206)$$

Вона інтегрується сумісно за часом при початкових умовах – в момент $t = 0$ система не деформована і рухається зі швидкістю V_{y0} :

$$y(0) = 0; \quad \dot{y}(0) = V_{y0}; \quad y_1(0) = 0. \quad (207)$$

При аналізі динамічних процесів треба знати частоту власних коливань літака (без урахування тертя). Для системи з одним ступенем вільності частоту визначають із рівняння

$$\omega_{вл} = \sqrt{\frac{n_{о\text{ см}} \frac{C_{ам} C_{nn} n_{nn}}{C_{ам} + C_{nn} n_{nn}}}{m_{нос}}}, \quad (208)$$

де $\frac{C_{ам} C_{nn} n_{nn}}{C_{ам} + C_{nn} n_{nn}}$ – еквівалентна жорсткість одного стояка. Відмітимо, що пружини жорсткістю $C_{ам}$ і $C_{nn} n_{nn}$ з'єднані послідовно;

$n_{о\text{ см}}$ – кількість основних стояків, $n_{о\text{ см}} = 2$.

Наведемо результати розрахунку удару легкого літака. Вихідні дані: $m_{нос} = 450$ кг; $C_{nn} = 1 \cdot 10^5$ Н/м; $C_{рес} = 0,69 \cdot 10^5$ Н/м; на стояках розміщено по одному колесу. Вертикальну швидкість удару, яка регламентована АП - 23, приймають такою, що дорівнює $V_{y0} = 3,05$ м/с.

Демпфірування в системі приймемо таким, що відношення двох послідовних амплітуд вільних згасаючих коливань становить

$$A_k / A_{k+1} = 2,4.$$

Коефіцієнт в'язкого тертя при цьому буде – $\alpha = 1,3 \cdot 10^3$ Нс/м.

Частота власних коливань літака, як впливає з формули (208), відбувається з частотою $f_{вл} = 2,164$ Гц. Період вільних коливань літака

становить $T_{ел} = 1 / f_{ел} = 0,462$ с. Важливим для навантаження конструкції є співвідношення між напівперіодом власних коливань і часом наростання сили при ударі. Чим ближчим до $T_{ел} / 2$ є тривалість удару, тим більшим буде відклик конструкції.

На рис. 108 показані коливання ЛА (центру мас і платформи) після удару. Вважаємо, що $Y(t)$ дорівнює нулю після першого відриву колеса від полоси.

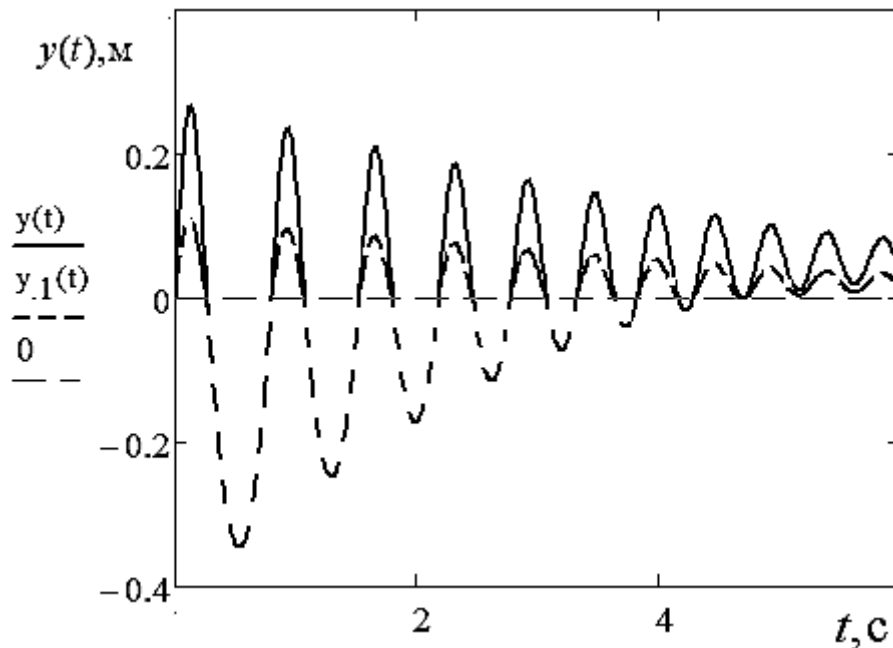


Рис. 108. Вертикальні коливання ЛА після удару на основні колеса

Відмітимо, що основні колеса декілька разів відриваються від полоси. Максимальне опускання центру мас при коливаннях становить 0,26 м, а підскоки досягають 0,35 м.

Прискорення точок амортизатора в перші секунди показані на рис. 109. Відзначимо високий рівень прискорень, це призводить до великого навантаження конструкції.

Зменшимо жорсткість ресори у три рази з метою пом'якшення амортизації ($C_{рес} = 0,23 \cdot 10^5$ Н/м). Частота коливань центру мас стане меншою – $f_{ел} = 1,463$ Гц, а період коливань – більшим $T_{ел} = 0,68$ с.

На рис. 110 показано зміну узагальнених координат при посадці. Видно, що опускання центру мас ЛА стало більшим і досягло 0,4 м. Але існують тільки два відокремлення коліс від поверхні аеродрому.

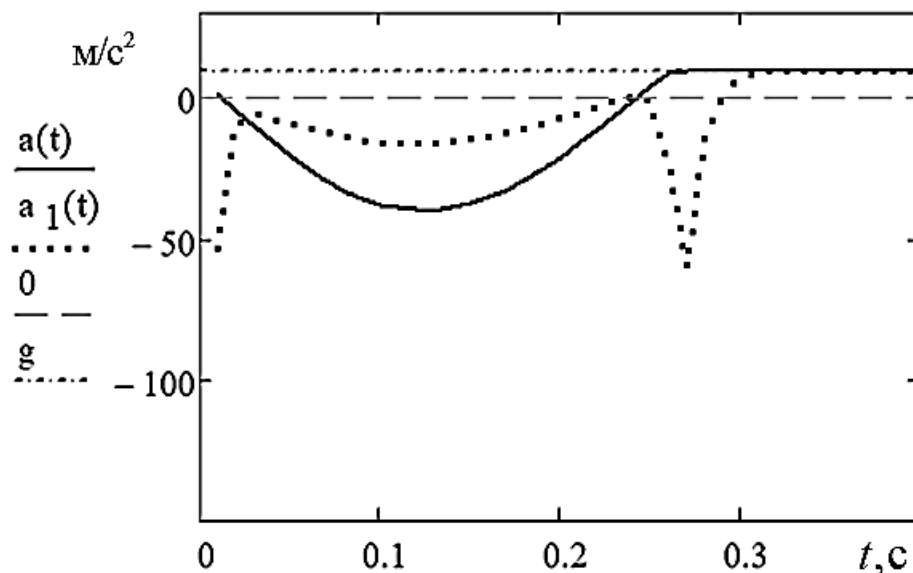


Рис. 109. Прискорення ЛА при посадці

На рис. 111 показані прискорення в перший момент удару для більш м'якої амортизації.

Прискорення в центрі мас ЛА до торкання колесами полоси менше, ніж вільне падіння, $-g = 9,81 \text{ м/с}^2$ і спрямоване вниз. У міру зростання реакції землі від удару прискорення змінює свій знак, стає направленим вгору і досягає величини 35 м/с^2 . Великих прискорень набуває платформа в перші миттєвості удару.

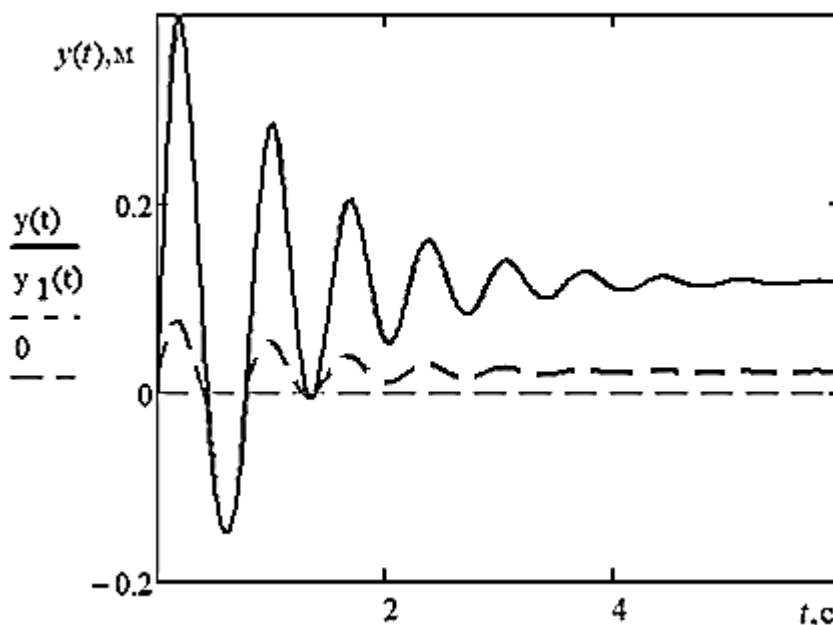


Рис. 110. Зміна узагальнених координат при посадці

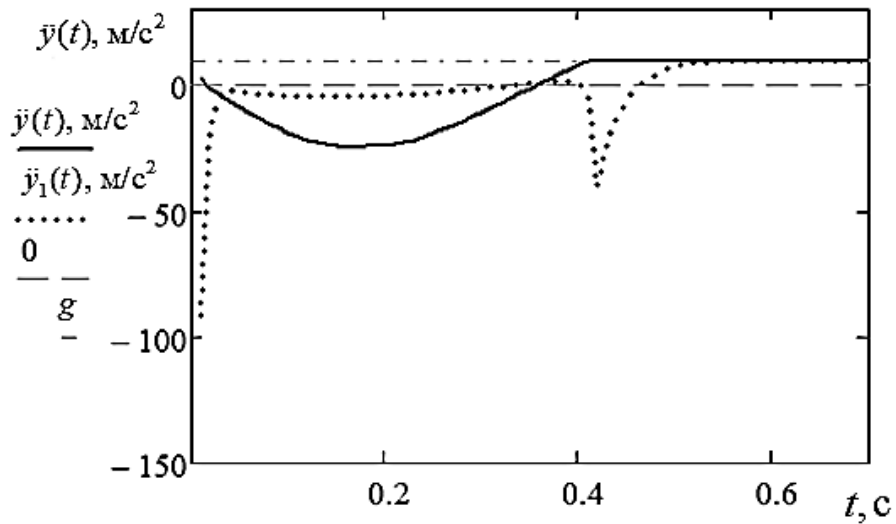


Рис. 111. Прискорення в перший момент удару

Реакція від двох опор сягає в перші секунди удару значних величин, а згодом, після згасання коливань, стає такою, що дорівнює посадковій вазі ЛА (рис. 112). В моменти відокремлення коліс від полоси сила дорівнює нулю.

Сила від коліс стояка $R_{on}(t)n_k$ витрачається на деформування ресори і внутрішнє в'язке тертя в її матеріалі

$$R_{ам}(t) = R_{он}(t)n_k = R_{терт\ ам}(t) + R_{пр\ ам}(t), \quad (209)$$

де сили пружності і в'язкого тертя такі, що дорівнюють:

$$R_{пр\ ам}(t) = C_{ам}(y(t) - y_1(t)), \quad R_{терт\ ам}(t) = \alpha(\dot{y}(t) - \dot{y}_1(t)). \quad (210)$$

Сила демпфірування значно менше сили пружності і швидко згасає (рис. 113).

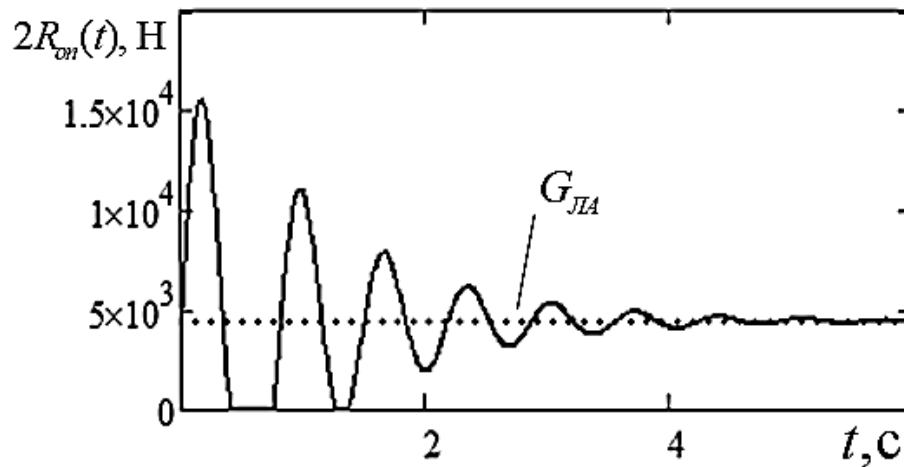


Рис. 112. Реакція опор шасі при ударі

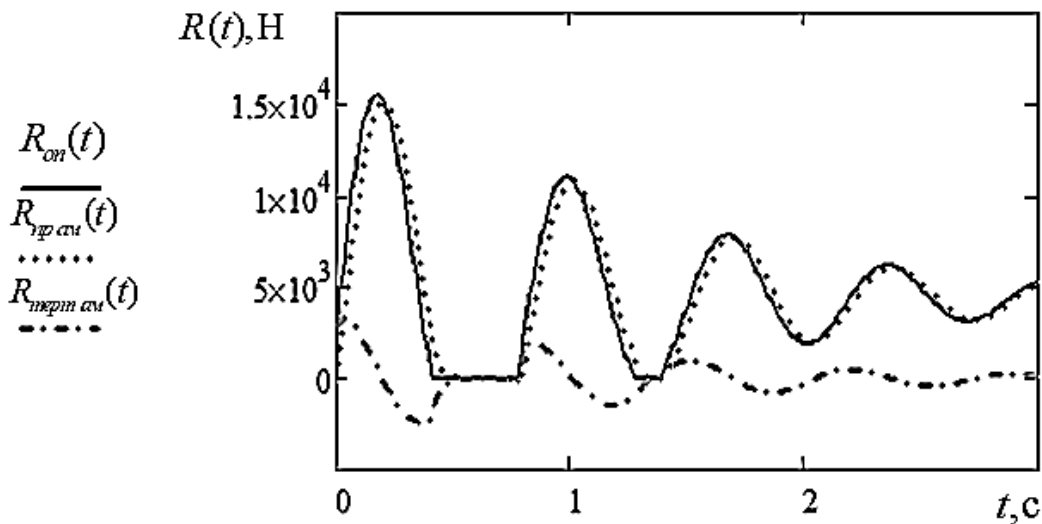


Рис. 113. Співвідношення пружних і в'язких сил, які діють у ресорі

Сила в амортизаторах на прямому і зворотному ході (за час $t = 0,5$ с) залежно від ходу штока амортизатора має форму петлі (рис. 114). Це так звана діаграма роботи амортизатора. Площа, що міститься між кривими на прямому і зворотному ході, характеризує демпфірування в системі.

За час ($t = 3,0$ с) згасаючих коливань сила в ресорі і хід штока змінюються за часом. Виключаючи змінну t , одержуємо параметричну криву – роботу ресори (рис. 115). Видно, що сила і хід штока з часом набувають постійного значення, що відповідає стоянці ЛА.

Перевантаження ЛА на посадці – важливий чинник, який характеризує напруженість конструкції. Воно може бути обчислене через поверхневі сили або через прискорення, що викликані дією цих поверхневих сил (рис. 116):

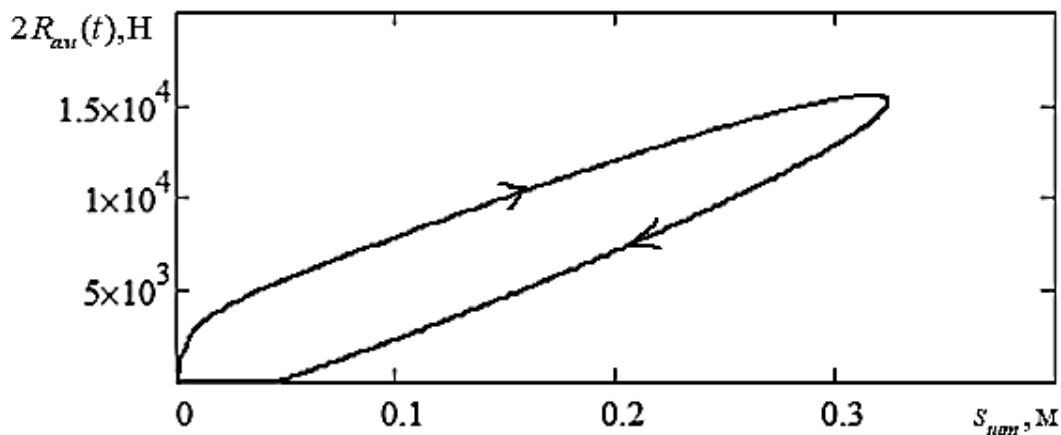


Рис. 114. Сила в ресорах на прямому і зворотному ході

$$n_y = \frac{2R_{on}(t)n_k + Y(t)}{G} = - \frac{\ddot{y}(t) - g}{g} . \quad (211)$$

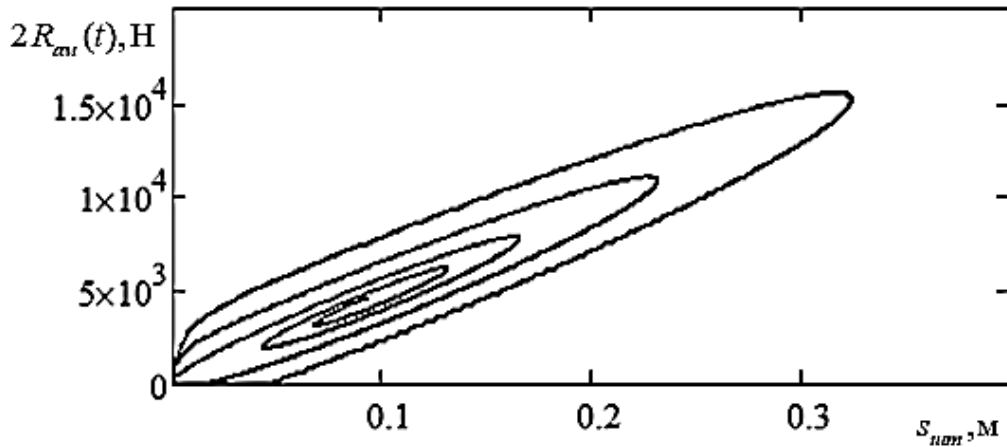


Рис. 115. Діаграма роботи ресори

У рівнянні (211) записано проекцію перевантаження на нормальну вісь літака, яка спрямована вгору. Як видно, в перший момент удару за частки секунди перевантаження досягає максимального значення. В окремі моменти часу (при відскоках ЛА) перевантаження відсутнє – маємо вільне падіння ЛА.

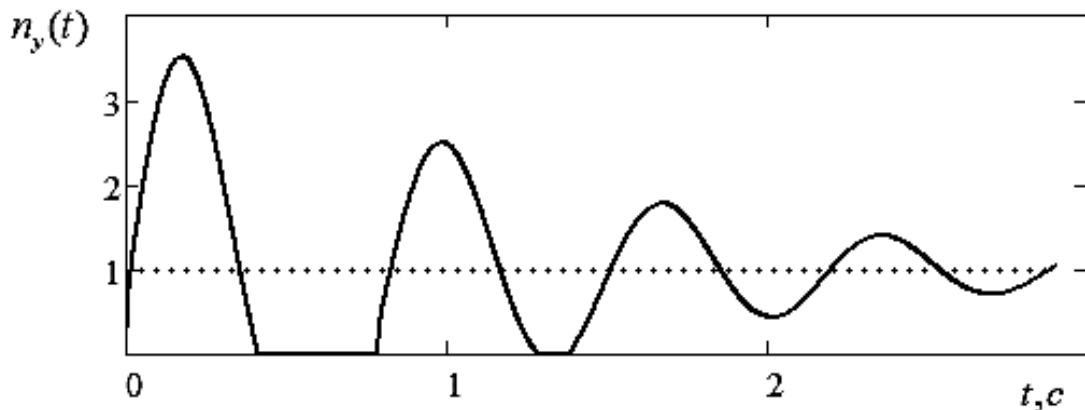


Рис. 116. Перевантаження при посадці

Система з двома степенями вільності

На рис. 117 показано основний стояк шасі як систему з двома степенями вільності. Враховано масу рухомих частин стояка – коліс, візка і т. ін. Очевидно, що $m_{noc} / 2 = m + m_{пучч}$. Координати $y(t)$ і $y_k(t)$ задають положення системи. Жорсткості амортизатора і пневматиків коліс розраховують як жорсткості пружин без попереднього затягування.

Додатні координати відраховують вниз, від нульового положення, позначеного як $O - O$. Лівий рисунок відповідає моменту посадки $t = 0$, коли ЛА торкається поверхні аеродрому, літак рухається вертикально вниз зі швидкістю V_{y0} . У цей момент реакція поверхні відсутня: $R_{on}(0) = 0$, а на стояк діють масові сили ваги $G/2$ і $G_{пyxч}$ та поверхнева аеродинамічна сила $Y(t)/2$. Пружні елементи амортизації ЛА – стояки та колеса не деформовані.

На правому рисунку для певного моменту часу t від початку удару показано деформовану механічну систему. Додатково виникає поверхнева сила $R_{on}(t)n_k$ і внутрішні сили пружності і тертя. Виникають великі прискорення в елементах шасі, а також всього ЛА. У конструкції шасі виникають коливання.

Розглянемо систему з двома степенями вільності за наявності в'язкого тертя (рис. 118).

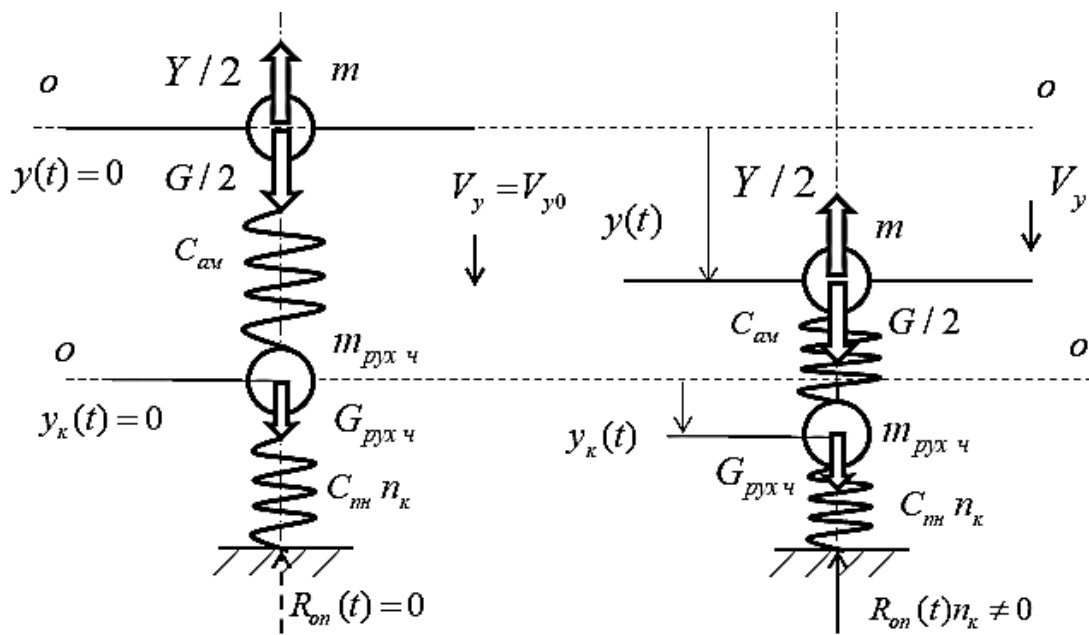


Рис. 117. Основний стояк шасі – система з двома степенями вільності

Рівняння руху верхньої маси в проекції на вісь y має вигляд

$$m \ddot{y}(t) = -Y/2 + G/2 - R_{ам}(t), \quad (212)$$

де $R_{ам}(t)$ – сила з боку амортизатора. Ця сила не дорівнює силі від реакції землі $R_{on}(t)n_k$ і визначається як сума сил пружності амортизатора (ресори) та сил внутрішнього тертя в ньому:

$$R_{ам}(t) = R_{np\ ам}(t) + R_{мерт\ ам}(t) = C_{ам}(y(t) - y_1(t)) + \alpha(\dot{y}(t) - \dot{y}_1(t)). \quad (213)$$

Рівняння руху коліс у проекції на ось y має вигляд

$$m_{пyxч} \ddot{y}_к(t) = G_{пyxч} + R_{ам}(t) - R_{он}(t)n_к, \quad (214)$$

де $R_{он}(t)$ – реакція поверхні аеродрому на одне колесо, залежить від деформації пневматика колеса

$$R_{он}(t) = C_{nn} y_к(t),$$

де $y_к(t)$ – вертикальне переміщення коліс, чисельно дорівнює деформації пневматика. Відмітимо, що $R_{он}(t) = 0$, якщо координата $y_1(t)$ від'ємна, тобто колесо відривається від полоси.

Система рівнянь (212) і (214) має інтегруватися сумісно при початкових умовах. При $t = 0$

$$y(0) = 0; \quad \dot{y}(0) = V_{y0}; \quad y_к(0) = 0; \quad \dot{y}_к(0) = V_{y0}. \quad (215)$$

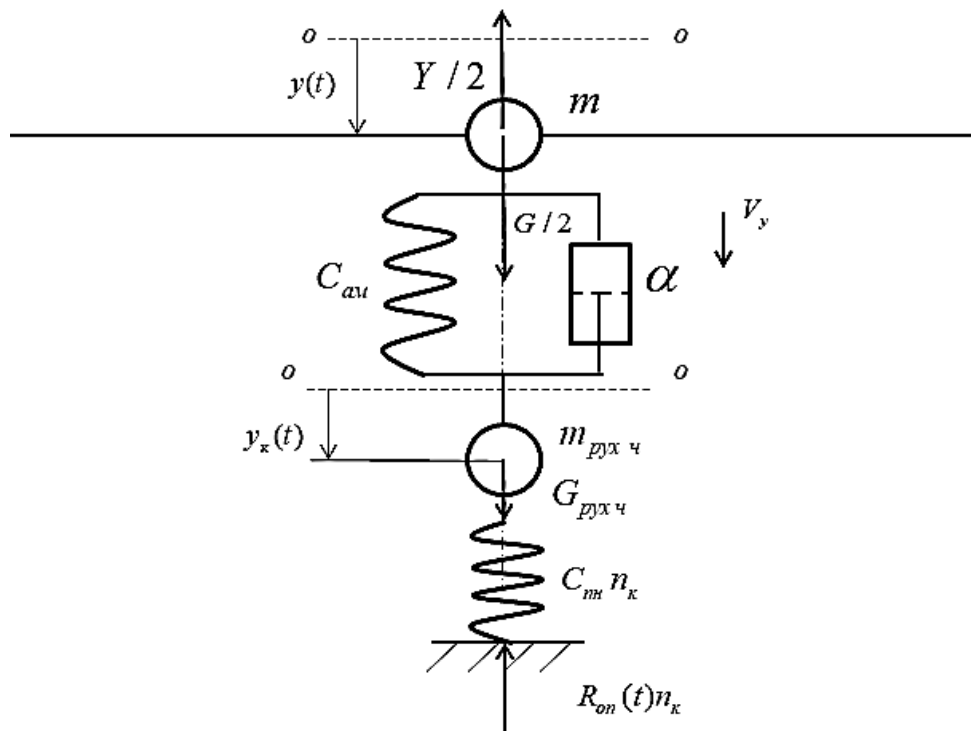


Рис. 118. Ударне навантаження стояка шасі

Форми та частоти власних коливань стояка шасі як системи з двома масами

Знайдемо частоти та форми власних коливань системи (рис. 119,а) з двома масами. Пружини схематично зображають елементи, що

деформуються, – амортизатор і пневматики коліс. Вважаємо, що в процесі вільних коливань реакція опори завжди спрямована вгору, тобто не відбувається відриву колеса. У положенні рівноваги маси займають положення $O - O$. Узагальнені координати, які задають положення системи, це зміщення мас – $y(t)$ та $y_k(t)$.

У процесі вільних коливань сили інерції $(-m\ddot{y}(t))$ і $(-m_{пyxч}\ddot{y}_k(t))$ деформують систему (рис. 119,б). Переміщення маси і рухомих частин (колеса) від сил інерції визначимо на основі принципу суперпозиції:

$$\begin{aligned} y(t) &= (-m\ddot{y}(t)) / C_{ам} + (-m\ddot{y}(t) - m_{пyxч}\ddot{y}_k(t)) / C_{пн}n_k; \\ y_k(t) &= (-m\ddot{y}(t) - m_{пyxч}\ddot{y}_k(t)) / C_{пн}n_k. \end{aligned} \quad (216)$$

Вільні коливання відбуваються за гармонічним законом

$$\begin{aligned} y(t) &= A \sin(\omega_{вл}t); \\ y_{пyxч}(t) &= A_{пyxч} \sin(\omega_{вл}t), \end{aligned} \quad (217)$$

де $A, A_{пyxч}$ – амплітуди вільних коливань ЛА та рухомих частин;

$\omega_{вл}$ – власна частота.

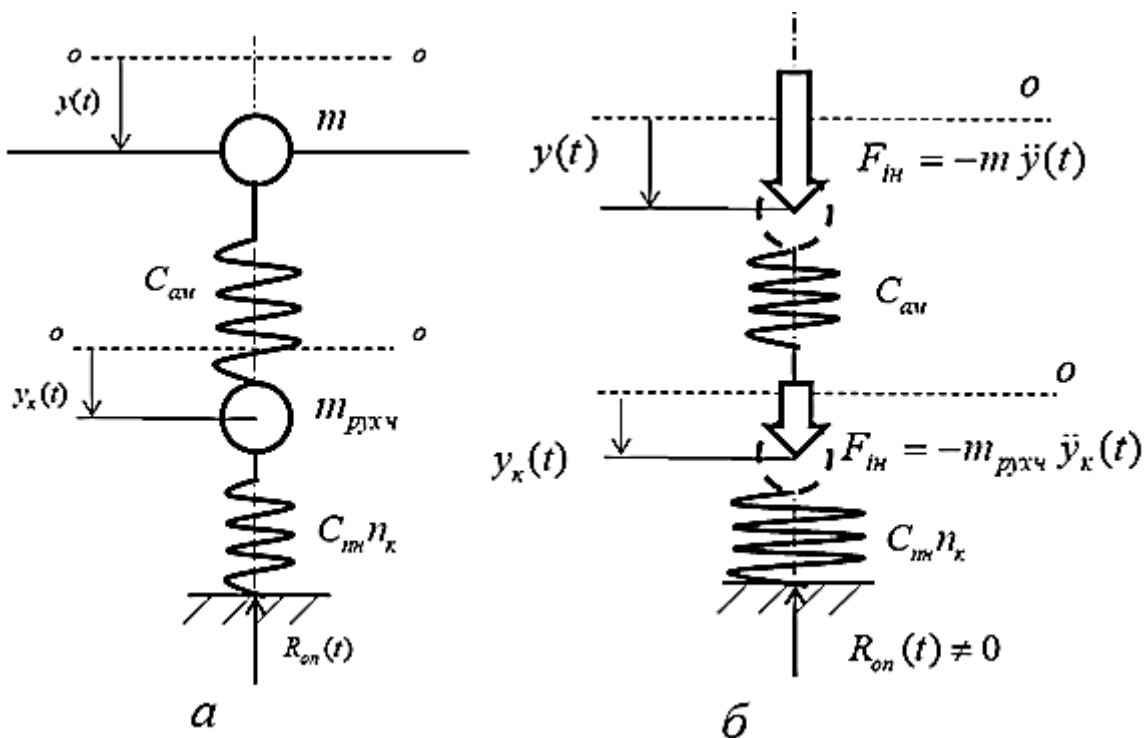


Рис. 119. Власні коливання системи

Підставляючи (217) в (216), одержуємо однорідну систему відносно невідомих амплітуд і власної частоти

$$\left(\frac{m\omega_{\text{вл}}^2}{C_{\text{ам}}} + \frac{m\omega_{\text{вл}}^2}{C_{\text{нн}}n_{\text{к}}} - 1 \right) A + \frac{m_{\text{рухч}}\omega_{\text{вл}}^2}{C_{\text{нн}}n_{\text{к}}} A_1 = 0; \quad (218)$$

$$\left(\frac{m\omega_{\text{вл}}^2}{C_{\text{нн}}n_{\text{к}}} \right) A + \left(\frac{m_{\text{рухч}}\omega_{\text{вл}}^2}{C_{\text{нн}}n_{\text{к}}} - 1 \right) A_1 = 0.$$

Частоти власних коливань системи визначають із рівняння (219) – детермінант матриці, складеної з коефіцієнтів при невідомих амплітудах A , $A_{\text{рухч}}$ має дорівнювати нулю

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{m\omega_{\text{вл}}^2}{C_{\text{ам}}} + \frac{m\omega_{\text{вл}}^2}{C_{\text{нн}}n_{\text{к}}} - 1 \right) & \frac{m_{\text{рухч}}\omega_{\text{вл}}^2}{C_{\text{нн}}n_{\text{к}}} \\ \left(\frac{m\omega_{\text{вл}}^2}{C_{\text{нн}}n_{\text{к}}} \right) & \left(\frac{m_{\text{рухч}}\omega_{\text{вл}}^2}{C_{\text{нн}}n_{\text{к}}} - 1 \right) \end{vmatrix} = 0. \quad (219)$$

Дві нормовані форми коливань (при $A=1$) визначають з першого рівняння системи (218)

$$A_1 = \frac{\left(\frac{m\omega_{\text{вл}}^2}{C_{\text{ам}}} + \frac{m\omega_{\text{вл}}^2}{C_{\text{нн}}n_{\text{к}}} - 1 \right) \cdot 1}{\frac{m_{\text{рухч}}\omega_{\text{вл}}^2}{C_{\text{нн}}n_{\text{к}}}} \quad (220)$$

при $\omega_{\text{вл}1}$ і $\omega_{\text{вл}2}$.

Наведемо результати розрахунку удару легкого літака на основні стояки шасі. Вихідні дані для основного стояка: $m = 210 \text{ кг}$; $m_{\text{рухч}} \approx m_{\text{к}} = 15 \text{ кг}$; $C_{\text{нн}} = 1 \cdot 10^5 \text{ Н/м}$; $C_{\text{ам}} = C_{\text{рес}} = 0,23 \cdot 10^5 \text{ Н/м}$; на стояку розміщено одне колесо. Загальна маса системи і демпфірування в ресорі такі ж, як у системі, зображеній на рис. 107 – $m_{\Sigma} = 450 \text{ кг}$; $\alpha = 1,3 \cdot 10^3 \text{ Нс/м}$. Вертикальну швидкість удару, яка регламентована АП-23, приймають такою: $V_{y0} = 3,05 \text{ м/с}$.

Частоти власних коливань системи з двома степенями вільності визначимо з (219). Вони становлять $f_{\text{вл}1} = 1,503 \text{ Гц}$ і $f_{\text{вл}2} = 14,56 \text{ Гц}$. Відзначимо, що частота одномасової системи становила $f_{\text{вл}} = 1,463 \text{ Гц}$. Невелика різниця першої власної частоти одномасової системи відносно $f_{\text{вл}1}$ пов'язана з малою масою рухомих частин шасі. Нормовані форми власних коливань (амплітудні відхилення мас) і відповідні їм частоти

зображені на рис. 120. Зліва від форм показані положення рівноваги системи.

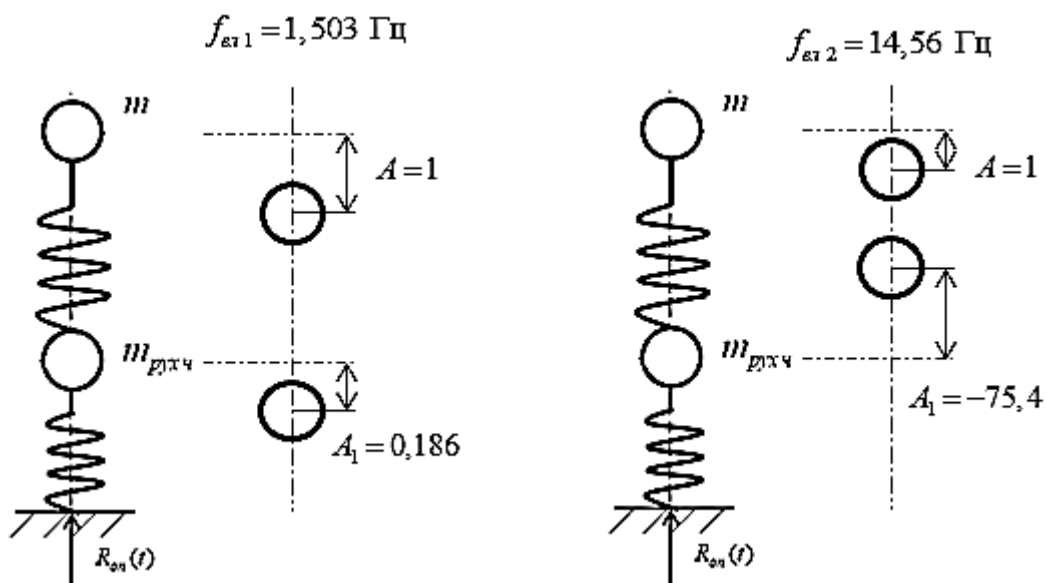


Рис. 120. Нормовані форми власних коливань системи

Маси при коливаннях за першою формою рухаються в один бік (пружні елементи стискаються), а за другою – в протилежних напрямках (верхня пружина стискається, а друга – розтягується). Форми коливань – ортогональні.

Відзначимо великі переміщення колеса при коливаннях за другою формою. З урахуванням значення періодів власних коливань і часу удару ЛА слід очікувати реакцію конструкції в основному за першою формою. Другий тон коливань дає суттєву добавку на перехідних режимах – у момент удару ЛА і при відокремленні коліс від полоси.

Скористаємося рівняннями руху і проведемо чисельне моделювання на ЕОМ удару літака.

Характер зміни прискорень центру мас ЛА і колеса при ударі впродовж перших двох секунд показано на рис. 121. Спостерігається складний нестационарний загасаючий процес. Спостерігається відклик конструкції за двома власними частотами. Два рази ЛА відокремлюється від полоси – рухається з прискоренням вільного падіння, оскільки відсутні поверхневі сили.

Як видно, найбільше прискорення центру мас має місце при $t = 0,12$ с і досягає $\ddot{y}(t) = -25,8 \text{ м/с}^2$, а колеса – при $t = 0,02$ с і становить $\ddot{y}_k(t) = -150 \text{ м/с}^2$. Видно, що маса m здійснює коливання в основному за

першим тоном, з частотою $f_{a1} = 1,503$ Гц. Однак у моменти різкої зміни навантажень спостерігається і реакція конструкції за другим тоном із частотою $f_{a2} = 14,56$ Гц. Прискорення колеса визначаються другим тоном, вони досягають максимальних значень у моменти удару ЛА і відриву коліс від посадкової смуги. Слід відмітити їх великий рівень.

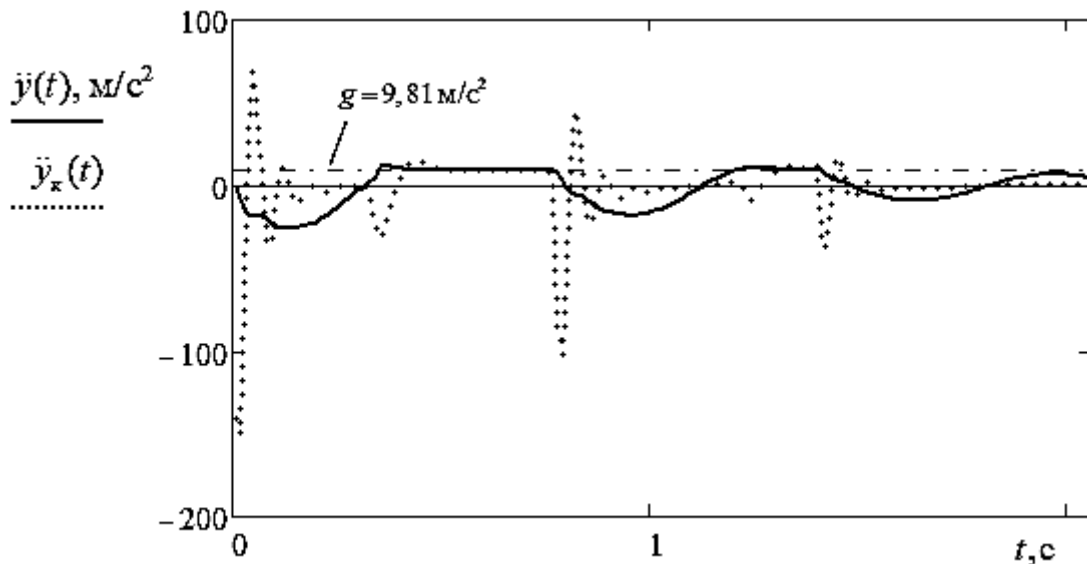


Рис. 121. Прискорення центру мас ЛА і колеса впродовж перших двох секунд

На рис. 122 зображені прискорення в районі колеса для двох розрахункових схем (з однією і двома масами).

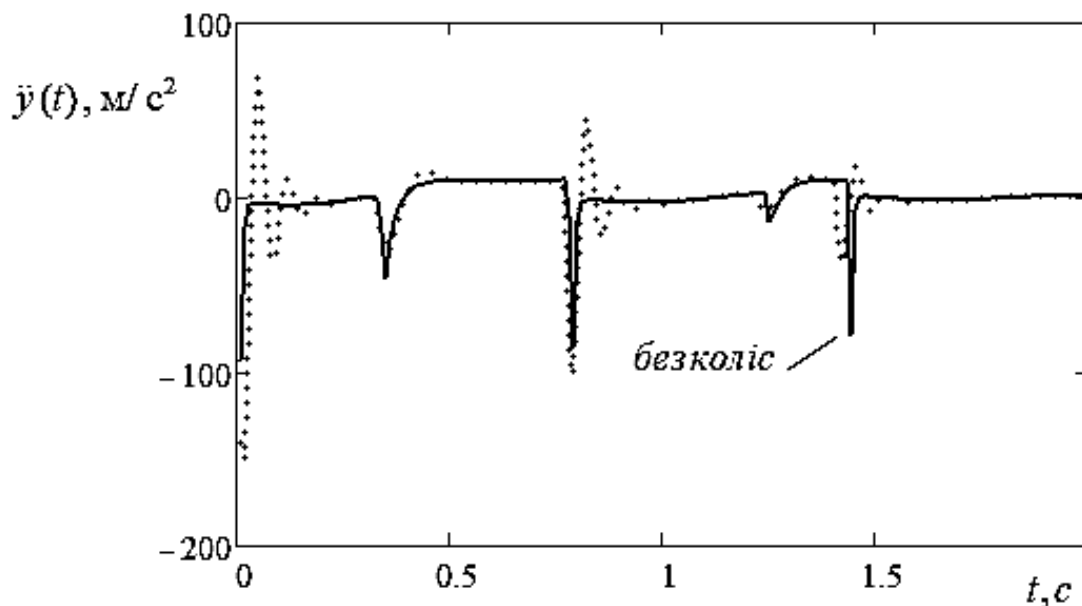


Рис. 122. Прискорення в районі колеса для двох розрахункових схем

Бачимо суттєву різницю в характері зміни цих величин. Урахування інерційності колеса призвело до появи в системі додаткового коливального руху. Друга ММ є більш детальною і тому більш достовірною.

Швидкість колеса (платформи) відносно центру мас для двох розрахункових схем показано на рис. 123.

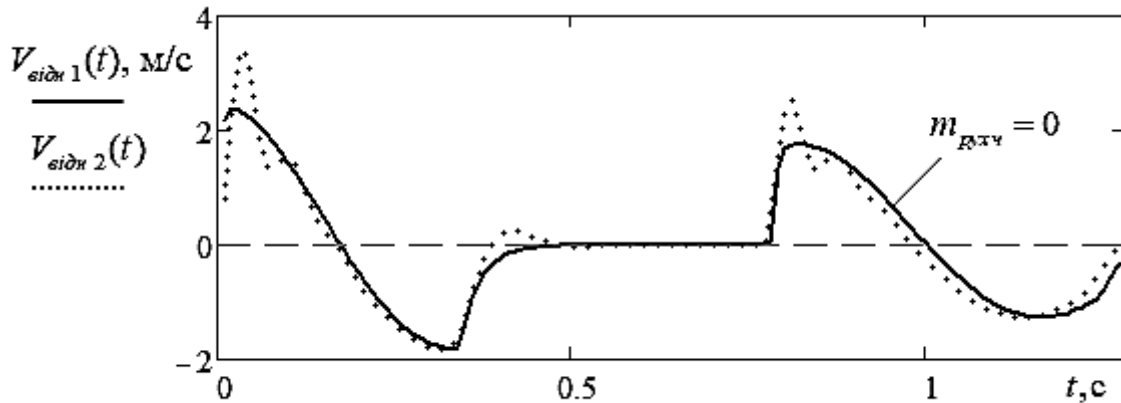


Рис. 123. Відносна швидкість штока

Вона визначає величину сил тертя в ресорі. У момент відриву ЛА відносна швидкість дорівнює нулю. При врахуванні маси колеса відносна швидкість змінюється більш різко, це пов'язано з коливаннями колеса за другою формою.

Для першої і другої схем на рис. 124 показані переміщення центру мас, а на рис. 125 – сумарної реакції опор шасі ЛА.

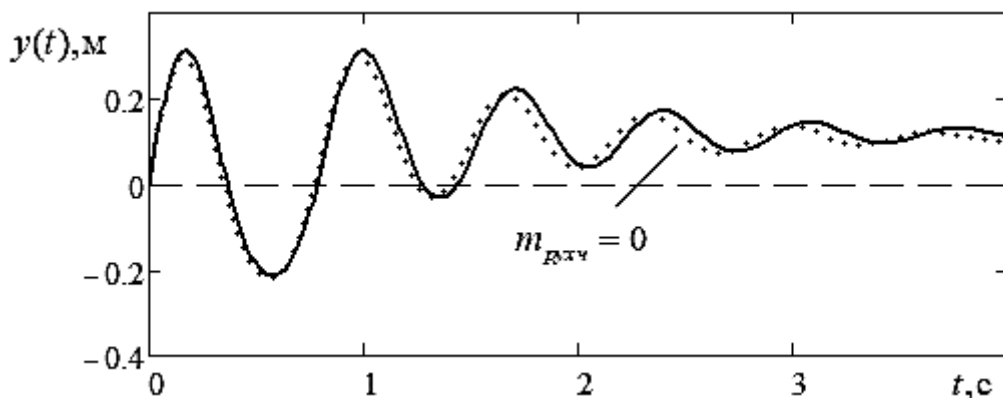


Рис. 124. Переміщення центру мас для двох систем

Оскільки маса рухомих частин незначна, різниця в моделюванні переміщень центру мас для систем є незначною. За декілька секунд

коливання центру мас зникають. Стале переміщення відповідає статичній деформації амортизації шасі.

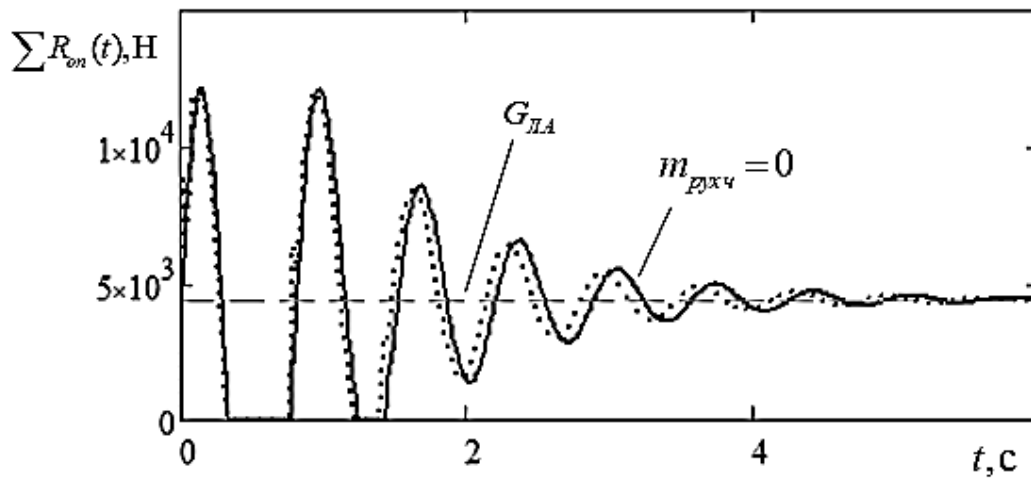


Рис. 125. Сумарна реакція шасі ЛА при ударі

Сумарна сила від опор шасі в рази перевищує статичне значення в перший момент удару і після підскоку. Вона викликає динамічне навантаження конструкції.

Пружні коливання конструкції, в свою чергу, впливають на реакцію опор. Це добре видно на рис. 126, на якому показаний внесок у перенавантаження ЛА коливань конструкції за двома тонами.

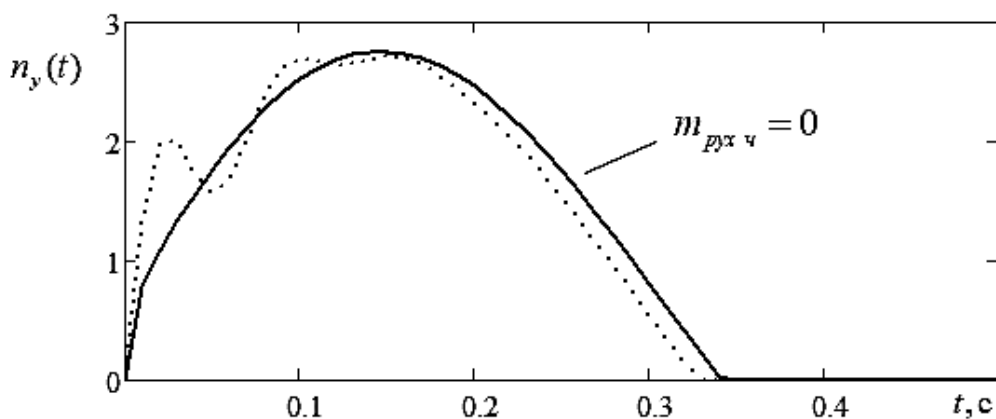


Рис. 126. Перевантаження ЛА для двох систем

Додаткові збурення в перевантаженні ЛА (рис. 126) відбуваються в моменти удару та відриву літака і пов'язані зі збудженням коливань у системі за другою формою. На це треба звертати увагу при аналізі змінних напружень у конструкції.

Сили в'язкого тертя в ресорі залежно від ходу штока впродовж часу $t = 0,7$ с змінюються згідно з рис. 127.

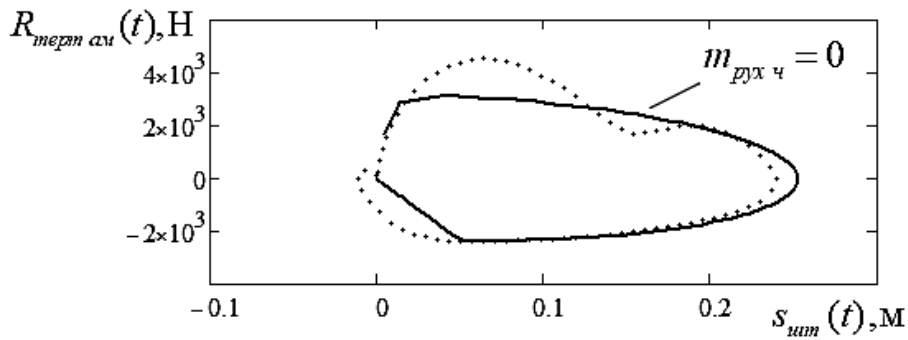


Рис. 127. Сили в'язкого тертя в ресорі залежно від ходу штока

Як бачимо, врахування маси рухомих частин колеса дозволяє суттєво скорегувати значення і характер зміни сил в'язкого тертя за ходом штока амортизатора.

Діаграму роботи ресори за час $t = 0,7 \text{ с}$ показано на рис. 128.

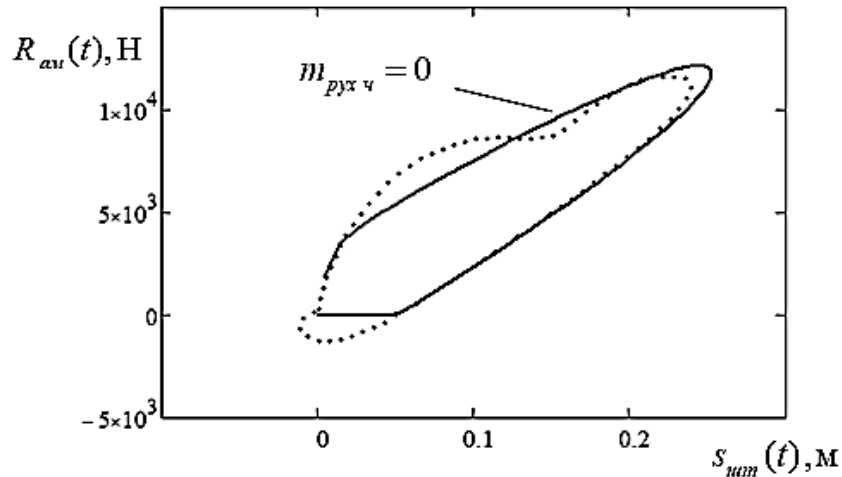


Рис. 128. Діаграма роботи ресори для двох схем

Урахування маси колеса суттєво уточнює діаграму роботи ресори.

Уточнення ММ навантаження ЛА при ударі

Доцільно зробити ряд уточнень ММ удару ЛА на посадці, що розглядалися вище.

На рис. 129 показано схему шасі, де введено додаткову пружину жорсткості C_0 . Додаткова пружина дозволяє врахувати деформацію таких елементів шасі, як шток, циліндр амортизатора і т. ін. Число степенів вільності, як видно з рисунку, збільшується до трьох.

В амортизаторі може використовуватися попередньо затягнута пружина (рис. 130).

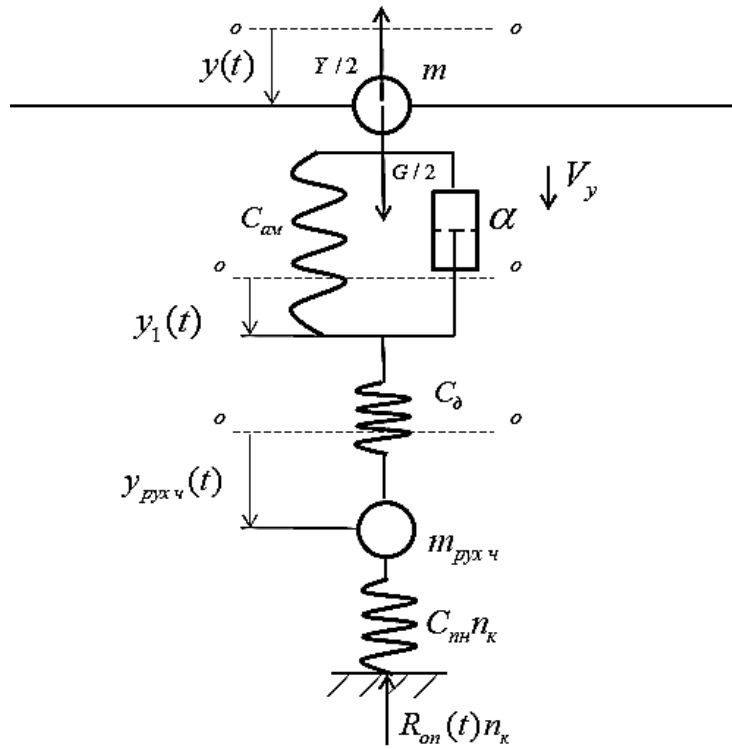


Рис. 129 . Схема шасі шасі з додатковою пружиною

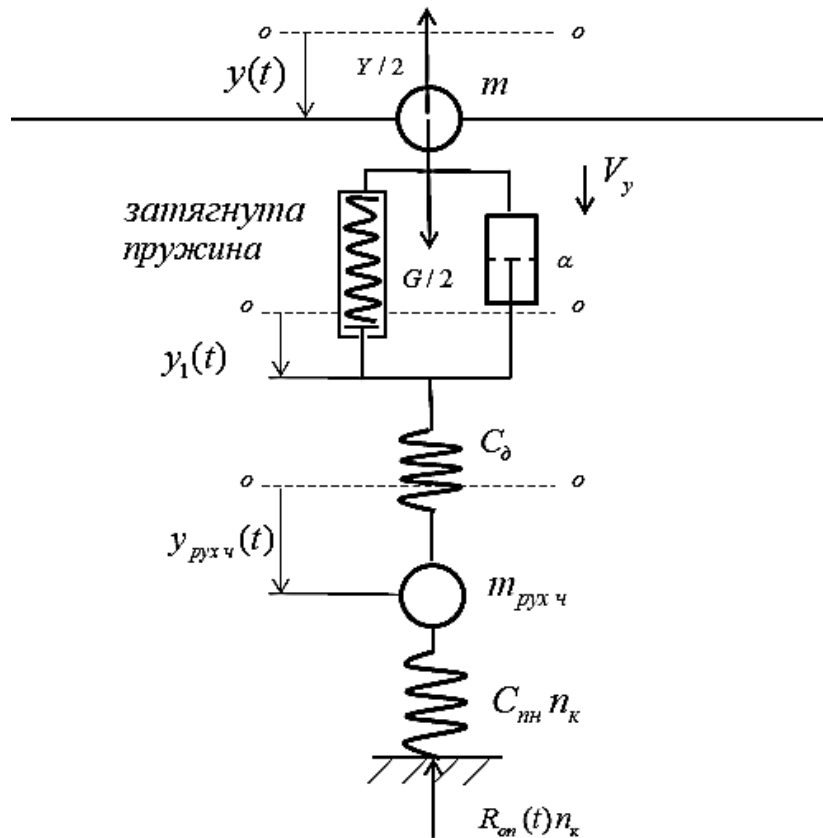


Рис. 130. Попередньо затянута пружина, що використовується в амортизаторі

На рис. 131 показана найбільш повна розрахункова схема стояка шасі. Вона найкраще відповідає роботі рідинно-газового амортизатора. Враховують обтиснення газу і проштовхування рідини через малі отвори в амортизаторі. Підкреслимо, що для застосування цієї схеми слід задати достатньо великий обсяг інформації щодо параметрів рідинно-газового амортизатора – початковий тиск газу, площа отворів для рідини, об'єм газової камери, площа рідинного і газового поршнів і т. ін.

Зусилля, при якому амортизатор починає обтискатися, визначимо з таких міркувань. До обтиснення амортизатора маси m і $m_{\text{рухч}}$ рухаються з однаковим прискоренням (нехтуємо деформацією додаткової пружини, тобто вважаємо, що $C_{\delta} \rightarrow \infty$)

$$\ddot{y}(t) = \ddot{y}_{\text{рухч}}(t). \quad (221)$$

З умови динамічної рівноваги рухомих частин (рис. 131) прискорення маси $m_{\text{рухч}}$ залежить від сили реакції $C_{\text{нн}}n_{\text{к}}y_{\text{к}}(t)$, ваги $m_{\text{рухч}}g$ і реакції амортизатора $P_{\text{ам}}(t)$:

$$\ddot{y}_{\text{рухч}}(t) = \frac{m_{\text{рухч}}g - C_{\text{нн}}n_{\text{к}}y_{\text{рухч}}(t) + P_{\text{ам}}(t)}{m_{\text{рухч}}}. \quad (222)$$

Прискорення маси m можна визначити з умови динамічної рівноваги всього стояка, воно залежить від поверхневих ($Y(t)/2$, $C_{\text{нн}}n_{\text{к}}y_{\text{к}}(t)$) і масових $(m + m_{\text{рухч}})g$ сил

$$\ddot{y}(t) = \frac{(m + m_{\text{рухч}})g - Y(t)/2 - C_{\text{нн}}n_{\text{к}}y_{\text{к}}(t)}{m + m_{\text{рухч}}}. \quad (223)$$

У момент зрушення штока амортизатора відносно циліндра $P_{\text{ам}o} = P_{\text{ам}}(t)$ амортизатор вступає в роботу. Після цього прискорення двох мас треба визначити з рівнянь (222) і (223).

Наступний крок у формуванні більш повної ММ удару ЛА – врахування пружності конструкції. Рекомендується ввести в ММ удару пружність крила. Для цього можна скористатися методом заданих форм – розкласти деформацію крила за формами коливань ЛА у пустоті (див. завдання 5).

Ця розрахункова схема шасі буде використовуватися при аналізі навантаження і розрахунках шасі на міцність у процесі виконання дипломного проекту.

Наведемо результати розрахунку удару на основні стояки шасі. Вихідні дані для основного стояка: $m = 14430$ кг; $m_{\text{пых ч}} = 216$ кг; $C_{\text{нн}} = 1,6 \cdot 10^6$ Н/м; на стояку розміщено два колеса. Вертикальну швидкість V_{y0} удару, яка регламентована АП - 25, приймають такою, що дорівнює 3,6 м/с.

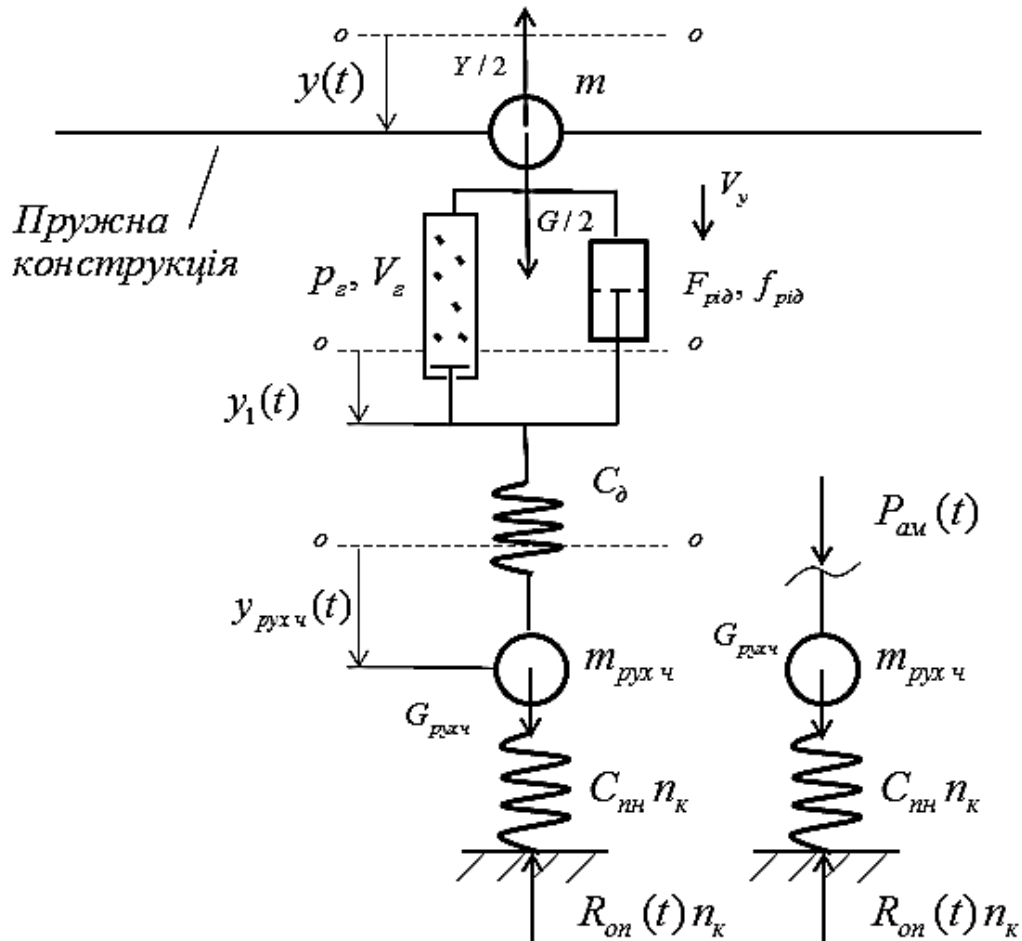


Рис. 131. Розрахункова схема шасі, яка найкраще відповідає роботі рідинно - газового амортизатора

На рис. 132 показано зміну узагальнених координат для двох значень початкового тиску в амортизаторі – $p_{01} = 60$ атм; $p_{02} = 20$ атм і площ отворів для перетікання рідини, пов'язаних співвідношенням – $f_{\text{пид}1} / f_{\text{пид}2} = 1/4$.

Перевантаження в центрі мас літака для двох випадків показані на рис. 133.

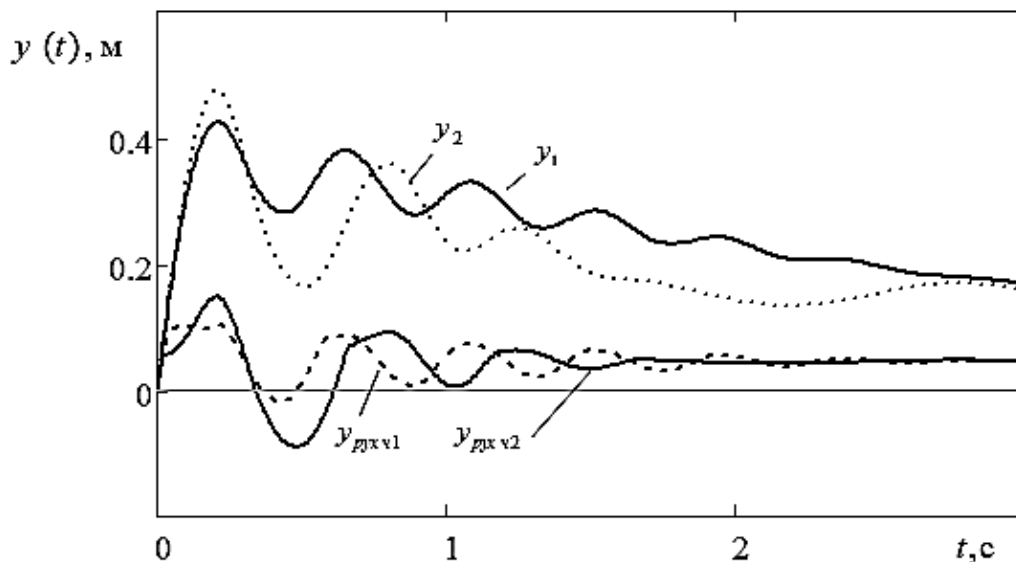


Рис. 132. Зміна узагальнених координат для літака транспортної категорії

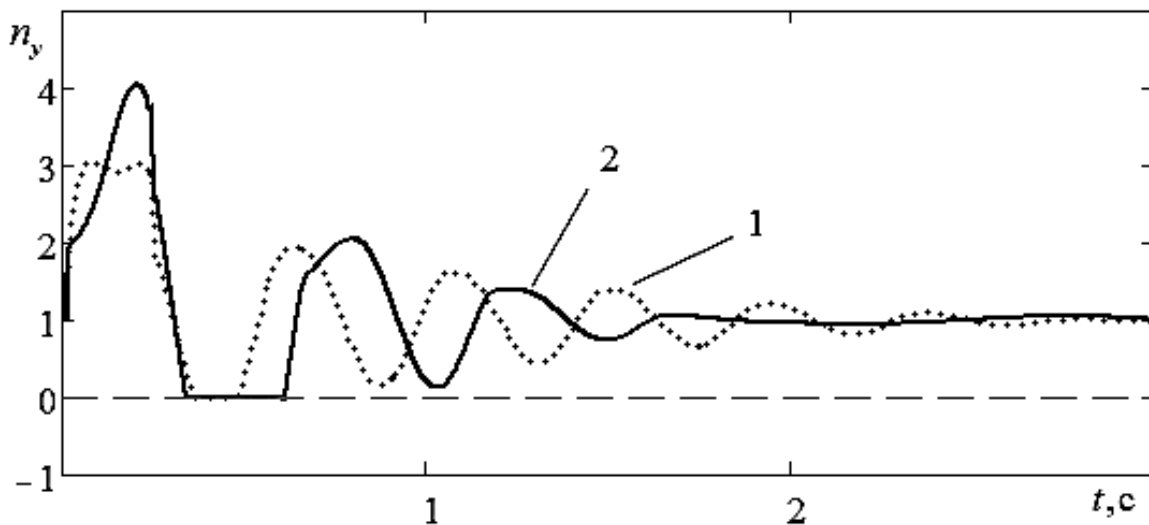


Рис. 133. Перевантаження в центрі мас літака

Для літака-прототипу перед виконанням розрахунку удару слід задати льотно-технічні характеристики (злітну і посадкову масу та швидкість ЛА, поздовжню базу шасі і винос основних коліс, кількість основних стояків і коліс на стояку), розрахувати стояночне навантаження на колесо, жорсткість пневматика і параметри амортизатора.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Авиационные правила. Нормы летной годности самолетов транспортной категории. – М. : МАК, 1993. – Ч. 25 (АП – 25). – 483 с.
2. Бисплингхофф, Р. Л. Аэроупругость [Текст] / Р. Л. Бисплингхофф, Х. Эшли, Р. Л. Хелфмен. – М. : Изд-во иностр. лит., 1958. – 799 с.
3. Образцов, И. Ф. Строительная механика летательных аппаратов [Текст] / И. Ф. Образцов. – М. : Машиностроение, 1986. – 535 с.
4. Горшков, А.Г. Аэрогидроупругость конструкции [Текст] / А.Г.Горшков, В.И. Морозов, А.Т. Пономарев и др. – М. : Физ.-мат. лит., 2000. – 592 с.
5. Кузнецов, О.А. Динамические нагрузки на самолет [Текст] / О.А. Кузнецов. – М.:Изд-во физ.-мат. лит., 2008. – 264 с.
6. Онищенко, В.М. Свободные и вынужденные колебания конструкции ЛА [Текст] / В.М. Онищенко. – Харьков: ХАИ, 2016. – 101 с.
7. Онищенко, В.М. Расчет резонансной диаграммы лопасти несущего винта транспортного вертолета [Текст] / В.М. Онищенко. – Харьков: ХАИ, 2017. – 106 с.
8. Фершинг, Г. Основы аэроупругости: пер. с нем. [Текст] / Г. Фершинг. – М.: Машиностроение, 1984.– 600 с.
9. Бидерман, В. Л. Прикладная теория механических колебаний [Текст] / В. Л. Бидерман. – М. : Высш. шк., 1972. – 416 с.

ЗМІСТ

Вступ.....	3
Завдання № 1. Визначення частоти власних коливань механічної системи з одним ступенем вільності.....	13
Завдання № 2. Вимушені коливання ЛА на пробігу.....	61
Завдання № 3. Визначення згинальної жорсткості консолі крила методом Релея.....	89
Завдання № 4. Вільні та вимушені коливання консолі крила з двома ступенями вільності.....	101
Завдання № 5. Власні коливання вільного ЛА з декількома ступенями вільності.....	122
Завдання № 6. Динаміка і навантаження шасі ЛА при посадці	140
Бібліографічний список.....	182

Навчальне видання

Онищенко Володимир Михайлович

**ВІЛЬНІ ТА ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ КОНСТРУКЦІЇ ЛІТАЛЬНОГО
АПАРАТА З ДЕКІЛЬКОМА СТЕПЕНЯМИ ВІЛЬНОСТІ**

Редактор Т. Г. Кардаш

Зв. план, 2019

Підписано до друку 01.04.2019

Формат 60×84 1/16. Папір офс. № 2. Офс. друк

Ум. друк. арк. 10,2. Обл.- вид. арк. 11,5. Наклад 50 пр.

Замовлення 92. Ціна вільна

Видавець і виготовлювач

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського

«Харківський авіаційний інститут»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

[http:// www.khai.edu](http://www.khai.edu)

Видавничий центр «ХАІ»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного
реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції
сер. ДК № 391 від 30.03.2001